WEIHENSTEPHAN · TRIESDORF
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Klaus Eckhardt

Intervallschätzung für den Erwartungswert normalverteilter Variablen

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de

Inhalt

1 Einleitung

Die im Allgemeinen wichtigste Kenngröße für eine Zufallsvariable X ist ihr Erwartungswert E(X). Falls die Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt ist, durch die sich die Variable beschreiben lässt, kann der Erwartungswert berechnet werden. Für eine diskrete Zufallsvariable gilt

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, x_i \tag{1}$$

wobei n die Anzahl der Werte x_i der Variable ist und $f(x_i)$ ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion. Im Fall einer stetigen Variable berechnet sich der Erwartungswert als

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x\, dx \tag{2}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f(x).

Liegt nur eine Stichprobe von N Variablenwerten X_i vor, aus der alle weiteren Schlussfolgerungen abgeleitet werden müssen, so können der Erwartungswert und andere Lageparameter, welche die Zufallsvariable charakterisieren, nur näherungsweise bestimmt werden. Wird ein einzelner Schätzwert berechnet, spricht man von einer **Punktschätzung**. Punktschätzer für den Erwartungswert ist der **empirische Mittelwert**

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \,. \tag{3}$$

Wie gut diese Schätzung ist, wie nahe der Schätzwert am gesuchten Erwartungswert liegt, bleibt bei dieser Berechnung offen. Dies ist bei einer **Intervallschätzung** − darum wird es im Folgenden gehen − anders. Die Angabe eines Konfidenzintervalls bzw. Vertrauensbereichs ist mit einer Aussage darüber verbunden, mit welcher Wahrscheinlichkeit der gesuchte Wert im angegebenen Intervall liegt. Dies ist eine wichtige zusätzliche Information. Tatsächlich handelt es sich um das Maximum an Information, das über die gesuchte Größe auf Grundlage der Stichprobe überhaupt erzielt werden kann.

In den folgenden Ausführungen geht es nur um die Intervallschätzung für den Erwartungswert normalverteilter Variablen. Auch für andere Lageparameter wie die Varianz und für nicht-normalverteilte Variablen gibt es entsprechende Schätzverfahren, die nach Bedarf der Fachliteratur entnommen werden können.

2 Berechnung von Konfidenzintervallen

Gegeben sei eine normalverteilte Zufallsvariable X. Gesucht sei ihr Erwartungswert E(X). Dieser stimmt im Spezialfall einer normalverteilten Variable mit dem Parameter μ der Normalverteilung, dem so genannten Mittelwert[1], überein: μ = E(X).

Punktschätzer für den Erwartungswert und daher auch für μ ist der empirische Mittelwert $\overline{X}$. Da die Werte der Variable $\overline{X}$ gemäß Gleichung 3 aus Werten der Zufallsvariable X entstehen, ist der empirische Mittelwert ebenfalls eine Zufallsvariable. Ist X normalverteilt, so ist auch $\overline{X}$ normalverteilt. Mehr noch, beide Variablen besitzen denselben Erwartungswert: $E(\overline{X}) = E(X)$. Da die Zufallsvariable $\overline{X}$ dadurch entsteht, dass man mehrere Einzelwerte X_i zusammenfasst, streuen ihre Werte allerdings weniger als die Einzelwerte X_i. Als Maß für die Streuung der Variable X dienen in der Statistik in erster Linie die **Varianz** Var(X) oder die Quadratwurzel aus der Varianz, die **Standardabweichung** $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. Die Namensgleichheit der Standardabweichung mit dem Parameter σ der Normalverteilung weist darauf hin, dass diese beiden Größen im Spezialfall der Normalverteilung identisch sind ($\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$).

Hat die Zufallsvariable X die Standardabweichung σ, so besitzt die Zufallsvariable $\overline{X}$ also eine geringere Standardabweichung $\sigma_{\overline{X}}$. Der genaue Zusammenhang lautet

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{4}$$

Tun wir zunächst einmal so, als wüssten wir, welche Werte die beiden Parameter μ und $\sigma_{\overline{X}}$ der Normalverteilung hätten, durch welche die Zufallsvariable $\overline{X}$ beschrieben wird. Normalverteilte Variablen lassen sich so transformieren, dass durch diese Umrechnung eine standardnormalverteilte Variable entsteht, d. h. eine normalverteilte Variable mit dem Mittelwert μ = 0 und der Standardabweichung σ = 1. Da eine standardnormalverteilte Variable üblicherweise symbolisch mit Z bezeichnet werden, spricht man auch von einer **Z-Transformation**. Ebenfalls gebräuchlich für diese Variablentransformation ist der Begriff **Standardisierung**.[2] Um diese durchzuführen, muss man von der Zufallsvariable (hier $\overline{X}$) ihren Mittelwert μ subtrahieren und die Differenz durch die Standardabweichung (hier $\sigma_{\overline{X}}$) teilen. Unter Verwendung von Gleichung 4 ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} \\ &= \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{N}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Darin ist N die Anzahl der Werte, aus denen der empirische Mittelwert berechnet wird.

In der Regel ist nun aber der Parameter σ unbekannt. Basiert die statistische Analyse lediglich auf einer Stichprobe von N Werten der Zufallsvariable, muss man sich damit begnügen, für die Standardabweichung σ einen Schätzwert einzusetzen. Punktschätzer für die Standardabweichung ist die **empirische Standardabweichung**

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}. \tag{6}$$

---

[1] nicht zu verwechseln mit dem empirischen Mittelwert (Gleichung 3)

[2] Siehe Skript „Standardisierung der Normalverteilung“ unter aufgabomat.de.

Ersetzt man in Gleichung 5 σ durch S, so ändert sich die Variable. Sie ist dann nicht mehr standardnormalverteilt. Es ergibt sich

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{N}} \; . \tag{7}$$

Dadurch, dass ein präziser Wert, nämlich σ, durch eine Zufallsvariable, nämlich S, ersetzt wurde, reduziert sich die statistische Sicherheit, mit der über die Variable Aussagen gemacht werden können.

Beispielsweise gilt für jede normalverteilte Zufallsvariable, unabhängig davon, welche Werte ihre Parameter haben, dass sie mit der Wahrscheinlichkeit von rund 68,3 % einen Wert im Intervall [Mittelwert − Standardabweichung; Mittelwert + Standardabweichung] annimmt. Für eine standardnormalverteilte Variable Z mit dem Mittelwert $\mu = 0$ und der Standardabweichung $\sigma = 1$ heißt das: $P(-1 \le Z \le 1) = 0{,}683$. Wahrscheinlichkeiten für stetige Zufallsvariablen ergeben sich aber als Flächen unter ihrer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im betreffenden Intervall. Wenn $P(-1 \le T \le 1)$ kleiner als $P(-1 \le Z \le 1)$ ist, heißt das, dass die Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von T im Intervall von −1 bis 1 kleiner ist als diejenige von Z, was wiederum bedeuten muss, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von T flacher verläuft als diejenige von Z.

T wird also durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschrieben, die derjenigen der Standardnormalverteilung ähnelt (Abbildung 1), aber flacher verläuft. Es handelt sich dabei um die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der so genannten **t-Verteilung**. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung hat nur einen Parameter, der **Freiheitsgrad** genannt und im Folgenden symbolisch mit f bezeichnet wird. Sein Wert berechnet sich im vorliegenden Fall als

$$f = N - 1 \tag{8}$$

(N: Stichprobenumfang).

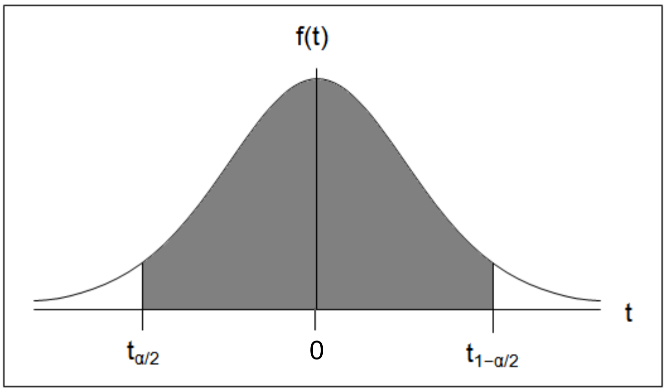

Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der t-Verteilung.

Betrachtet wird nun die Wahrscheinlichkeit $P(t_{\alpha/2} \le T \le t_{1-\alpha/2})$ dafür, dass T einen Wert im Intervall von $t_{\alpha/2}$ bis $t_{1-\alpha/2}$ annimmt. $t_{\alpha/2}$ und $t_{1-\alpha/2}$ stehen für **Quantile** der t-Verteilung. Quantile sind Werte, die von einer Zufallsvariable mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit unterschritten werden. $t_{\alpha/2}$ wird mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha/2$ unterschritten, $t_{1-\alpha/2}$ mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha/2$. Daher ist

$$\begin{aligned} P(t_{\alpha/2} \le T \le t_{1-\alpha/2}) &= P(T \le t_{1-\alpha/2}) - P(T \le t_{\alpha/2}) \\ &= 1 - \alpha/2 - \alpha/2 \\ &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

bzw., unter Verwendung von Gleichung 7,

$$P\left(t_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{N}} \leq t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha. \tag{9}$$

Das Argument der Funktion P, der Ausdruck $t_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{N}} \leq t_{1-\alpha/2}$, wird jetzt umgeformt:

$$t_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{N}} \leq t_{1-\alpha/2} \qquad \Big| \cdot \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}} \leq \overline{X}-\mu \leq t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}} \qquad \Big| -\overline{X}$$

$$t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}} - \overline{X} \leq -\mu \leq t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}} - \overline{X} \qquad \Big| \cdot(-1)$$

Bei der Multiplikation mit −1 ist zu beachten, dass sich die Kleinerzeichen umkehren. Es resultiert

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}} \geq \mu \geq \overline{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}}.$$

Dieser Ausdruck wird jetzt anstatt von links nach rechts von rechts nach links gelesen und so wieder als Argument in die Funktion P (Gleichung 9) eingesetzt:

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}}\right) = 1-\alpha.$$

Schließlich wird noch berücksichtigt, dass $t_{\alpha/2} = -\, t_{1-\alpha/2}$ ist. Dies folgt aus der speziellen Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der t-Verteilung (Abbildung 1). Damit ergibt sich

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}}\right) = 1-\alpha.$$

Ausgangspunkt war Gleichung 9, die eine Aussage über die Variable T darstellt. Durch die Umformungen ist aus dieser Aussage eine über den gesuchten Mittel- bzw. Erwartungswert μ geworden! Mit der Wahrscheinlichkeit (**statistischen Sicherheit**) $\gamma = 1 - \alpha$ gilt

$$\overline{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}}$$

oder, kompakter geschrieben:

$$\mu = \overline{X} \pm t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{N}}. \tag{10}$$

$\overline{X} - t_{1-\alpha/2}\, S/\sqrt{N}$ und $\overline{X} + t_{1-\alpha/2}\, S/\sqrt{N}$ sind die Begrenzungen eines Intervalls, in dem der Erwartungswert μ mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma = 1 - \alpha$ liegt. Man spricht davon, dass ein **Konfidenzintervall** bzw. **Vertrauensbereich** für den Erwartungswert bestimmt worden ist. Das vorliegende Verfahren wird daher auch als **Konfidenzschätzung** für den Erwartungswert bezeichnet.

3 Beispiel

Es liegt eine Stichprobe der Körpergröße X von N = 30 Männern vor (Tabelle 1). Es kann davon ausgegangen werden, dass X normalverteilt ist. Gesucht ist eine Aussage über den Erwartungswert, über die mittlere Körpergröße. Diese Aussage soll mit einer statistischen Sicherheit von 99 % getroffen werden.

Messung Nr.	Messwert (m)	Messung Nr.	Messwert (m)
1	1,86	16	1,77
2	1,77	17	1,71
3	1,78	18	1,83
4	1,88	19	1,85
5	1,93	20	1,76
6	1,82	21	1,61
7	1,73	22	1,72
8	1,70	23	1,87
9	1,68	24	1,80
10	1,76	25	1,66
11	1,80	26	1,75
12	1,84	27	1,79
13	1,83	28	1,92
14	1,74	29	1,78
15	1,79	30	1,81

Tabelle 1: Stichprobe der Körpergröße von N = 30 Männern.

Aus der Vorgabe $\gamma = 0{,}99$ folgt

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \gamma \\ &= 0{,}01 \end{aligned}$$

und damit $1 - \alpha/2 = 0{,}995$. Um das Konfidenzintervall für den Erwartungswert zu bestimmen, wird das $(1 - \alpha/2)$-Quantil $t_{1-\alpha/2}$ einer t-Verteilung benötigt, in diesem Fall der t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad

$$\begin{aligned} f &= 30 - 1 \\ &= 29. \end{aligned}$$

Quantilwerte lassen sich mithilfe eines Tabellenkalkulations- oder Statistikprogramms berechnen, in Excel beispielsweise mit der Funktion T.INV, oder einer **Quantiltabelle** entnehmen. Eine solche ist Tabelle 2. Sie zeigt die Werte von Quantilen zu unterschiedlichen Unterschreitungswahrscheinlichkeiten p für t-Verteilungen unterschiedlichen Freiheitsgrades f. Für f = 29 und p = 0,995 ist $t_{1-\alpha/2} = 2{,}76$. Damit ergibt sich für den Erwartungswert bzw. Mittelwert der Körpergröße

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{x} \pm t_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{N}} \\ &= 1{,}79\ \text{m} \pm 2{,}76 \cdot \frac{0{,}07\ \text{m}}{\sqrt{30}} \\ &= 1{,}79\ \text{m} \pm 0{,}04\ \text{m} \end{aligned}$$

Die Einheit kann auch ausgeklammert werden; ebenfalls korrekt ist die Angabe $\mu = (1{,}79 \pm 0{,}04)$ m.

f	p					
	0,841	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	1,32	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	1,20	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
4	1,14	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
5	1,11	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,09	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,08	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,07	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,06	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,05	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,05	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,04	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,04	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,04	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,03	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,03	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,03	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,03	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,03	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,03	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,02	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,02	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,02	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,02	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,02	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,02	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,02	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,02	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,02	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,02	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,01	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,01	1,30	1,68	2,01	2,40	2,68
70	1,01	1,29	1,67	1,99	2,38	2,65
100	1,01	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63
∞	1,00	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

Tabelle 2: Quantile t_p der t-Verteilung.

Bei der Angabe von Konfidenzintervallen sind die folgenden Regeln einzuhalten:

1. Werte physikalischer Größen sind das Produkt aus einem Zahlenwert und der Einheit der betreffenden Größe. Die Einheit darf nicht vergessen werden!
2. $\overline{X}$ und $t_{1-\alpha/2}\, S/\sqrt{N}$ sind in derselben Einheit, derselben Zehnerpotenz und mit derselben Genauigkeit anzugeben.
3. Üblicherweise wird die Anzahl der Stellen so gewählt, dass die Unsicherheit in der letzten Stelle liegt.

Die Körpergröße, beispielsweise, wird normalverweise so gemessen, dass die Messunsicherheit in der Größenordnung eines Zentimeters liegt. Entsprechend sind die Messwerte und ist auch das Konfidenzintervall angegeben. Die folgenden Angaben wären nicht korrekt:

- $\mu = 1{,}79 \pm 0{,}04$ m — Einheit des empirischen Mittelwerts fehlt
- $\mu = 1{,}79$ m $\pm$ 4 cm — ungleiche Zehnerpotenzen der Einheit Meter vor und nach dem ±-Zeichen (10^0 m und 10^{-2} m)
- $\mu = 1{,}79$ m $\pm$ 0,035 m — unterschiedliche Genauigkeit in den Angaben vor und nach dem ±-Zeichen

Die Eingangsdaten des obigen Beispiels und weitere Übungsaufgaben finden sich im Internet unter der Adresse aufgabomat.de in der Rubrik Statistik.

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de