WEIHENSTEPHAN · TRIESDORF
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Klaus Eckhardt

Zusammenfassung zu
Erwartungswert, Mittelwert und Standardabweichung

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de

Inhalt

1 Erwartungswert 1
2 Mittelwert 1
3 Empirischer Mittelwert 1
4 Standardabweichung, Bedeutung 1 2
5 Standardabweichung, Bedeutung 2 2
6 Empirische Standardabweichung 2
7 Standardunsicherheit 3

1 Erwartungswert

Die allgemein wichtigste Kenngröße für eine Zufallsvariable X ist ihr Erwartungswert E(X). Die Bezeichnung als Erwartungswert lässt sich so erklären: Nimmt man eine Stichprobe von Werten der Zufallsvariable, so ist E(X) der am ehesten erwartete Mittelwert.

Falls die Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt ist, durch die sich die Variable beschreiben lässt, kann der Erwartungswert berechnet werden. Für eine diskrete Zufallsvariable gilt

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, x_i \,, \tag{1}$$

wobei n die Anzahl der Werte x_i der Variable ist und $f(x_i)$ ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion. Im Fall einer stetigen Variable berechnet sich der Erwartungswert als

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x\, dx \tag{2}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f(x).

2 Mittelwert

Als Mittelwert wird der Parameter μ der Normalverteilung bezeichnet. Lässt sich eine Zufallsvariable X durch die Wahrscheinlichkeitsdichte- bzw. Verteilungsfunktion einer Normalverteilung beschreiben (ist sie normalverteilt), so stimmt der Parameter μ der betreffenden Verteilung mit dem Erwartungswert E(X) der Variable überein:

$$\mu = E(X). \tag{3}$$

3 Empirischer Mittelwert

Liegt für eine Zufallsvariable X lediglich eine Stichprobe von N Werten X_i vor, so kann der Erwartungswert E(X) der Variable nur näherungsweise bestimmt werden. Wird ein einzelner Schätzwert berechnet, spricht man von einer Punktschätzung. Punktschätzer für den Erwartungswert ist der empirische Mittelwert

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \,. \tag{4}$$

Anders ausgedrückt: Der empirische Mittelwert berechnet sich als das arithmetische Mittel der Werte X_i. Je größer die Anzahl der Messwerte, auf denen die Analyse basiert, desto genauer ist der Schätzwert. Es gilt:

$$\lim_{N \to \infty} \overline{X} = E(X). \tag{5}$$

4 Standardabweichung, Bedeutung 1

Als Maß dafür, wie stark die Werte einer Zufallsvariable X um ihren Erwartungswert E(X) streuen, dient in der Statistik die so genannte Varianz Var(X) der Zufallsvariable. Falls die Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt ist, durch die sich die Variable beschreiben lässt, kann die Varianz berechnet werden. Für eine diskrete Zufallsvariable gilt

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,[x_i - E(X)]^2 \,, \tag{6}$$

wobei n die Anzahl der Werte x_i der Variable ist und $f(x_i)$ ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion. Im Fall einer stetigen Variable berechnet sich die Varianz als

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,[x - E(X)]^2\,dx \tag{7}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f(x).

Die Quadratwurzel $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ aus der Varianz wird Standardabweichung genannt.

5 Standardabweichung, Bedeutung 2

Als Standardabweichung wird auch der Parameter σ der Normalverteilung bezeichnet. Lässt sich eine Zufallsvariable X durch die Wahrscheinlichkeitsdichte- bzw. Verteilungsfunktion einer Normalverteilung beschreiben (ist sie normalverteilt), so stimmt der Parameter σ der betreffenden Verteilung mit der Standardabweichung der Variable überein:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,. \tag{8}$$

Genau aus diesem Grund wird der Parameter σ der Normalverteilung Standardabweichung genannt.

6 Empirische Standardabweichung

Liegt für eine Zufallsvariable X lediglich eine Stichprobe von N Werten X_i vor, so kann die Standardabweichung $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ der Variable nur näherungsweise bestimmt werden. Punktschätzer für die Standardabweichung ist die empirische Standardabweichung

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2} \,, \tag{9}$$

worin $\bar{X}$ der empirische Mittelwert der Stichprobenwerte ist.

Je größer die Anzahl der Messwerte, auf denen die Analyse basiert, desto genauer ist der Schätzwert:

$$\lim_{N\to\infty} S = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,. \tag{10}$$

7 Standardunsicherheit

Punktschätzer für den Erwartungswert ist der empirische Mittelwert $\overline{X}$. Da die Werte der Variable $\overline{X}$ gemäß Gleichung 4 aus Werten X_i der Zufallsvariable X berechnet werden, ist der empirische Mittelwert ebenfalls eine Zufallsvariable.

Beide Zufallsvariablen, $\overline{X}$ und X, besitzen denselben Erwartungswert:

$$E(\overline{X}) = E(X). \qquad (11)$$

Die Werte der Variable $\overline{X}$ streuen jedoch weniger stark als die Werte der Variable X. Dies liegt daran, dass die Werte von $\overline{X}$ durch das Zusammenfassen jeweils mehrerer Einzelwerte X_i entstehen. Die empirische Standardabweichung $S_{\overline{X}}$ des Mittelwerts ist

$$S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{N}} \qquad (12)$$

bzw.

$$S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{1}{N\,(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}\ . \qquad (13)$$

$S_{\overline{X}}$ wird auch Standardunsicherheit genannt. Die Standardunsicherheit ist die zentrale Größe bei der Bewertung von Messunsicherheiten, wie beispielsweise im Skript „Messunsicherheit“ unter der Internet-Adresse aufgabomat.de ausgeführt wird.

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de