WEIHENSTEPHAN · TRIESDORF
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Klaus Eckhardt

Physikaufgaben lösen

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de

Inhalt

1 Mathematik – die Basis der Beschreibung physikalischer Prozesse

Ein physikalischer Prozess wird untersucht, beispielsweise das Fallen eines Körpers nahe der Oberfläche der Erde. Um Effekte auszuschalten, welche die Beschreibung des Vorgangs erschweren, nämlich die Reibung und den Auftrieb, wird ein kleiner, schwerer Körper verwendet. Diesen lässt man von einer erhöhten Position aus fallen (Abbildung 1). Bei Loslassen des Körpers wird eine Uhr gestartet. Mithilfe von Lichtschranken wird registriert, zu welchen Zeiten der Körper vorgegebene Positionen erreicht.

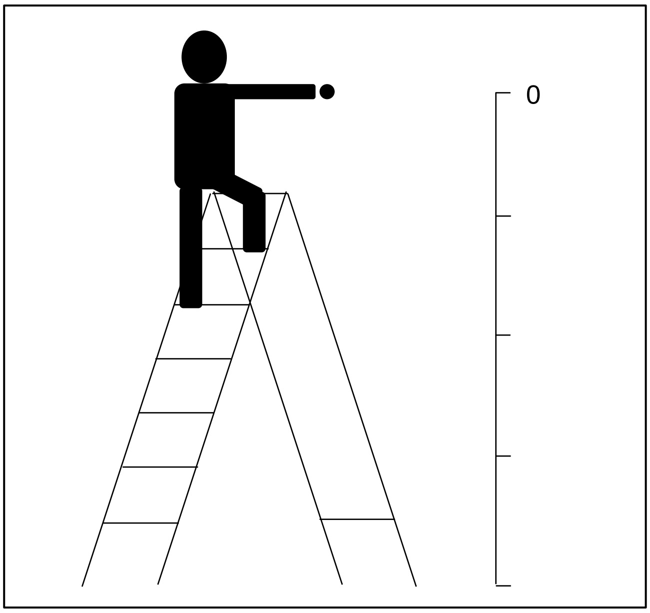

Abbildung 1: Experiment zum Fallen eines Körpers an der Oberfläche der Erde.

Das Ergebnis des Experiments sind mehrere Paare von Messwerten zur durchfallenen Strecke und zugehörigen Zeit (Abbildung 2 links).

Strecke (m)	Zeit (s)
0,00	0,00
0,75	0,39
1,50	0,55
2,25	0,68
3,00	0,78

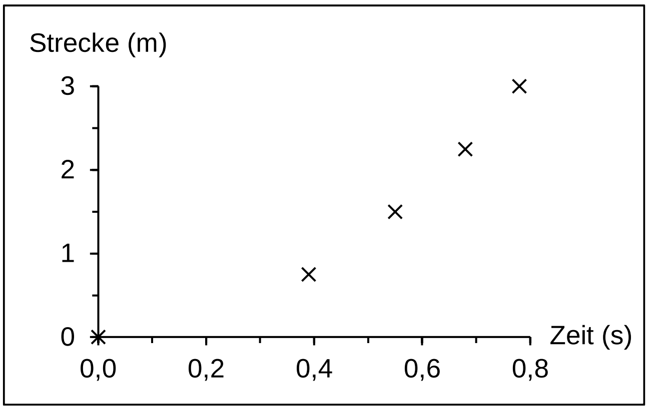

Abbildung 2: Messergebnisse in tabellarischer und grafischer Darstellung.

Damit sind Aussagen möglich wie „Der Körper benötigt 0,39 s um eine Strecke von 0,75 m Länge zu durchfallen.“ oder „Nach 0,68 s hat der Körper einen Weg von 2,25 m zurückgelegt.“. Die physikalische Analyse hat aber zum Ziel, über solche sehr spezielle, nur für Einzelfälle gültige Aussagen hinaus eine allgemeingültige Beschreibung des Vorgangs zu finden, die es ermöglicht, zu jeder beliebigen Zeit die zurückgelegte Strecke oder zu jeder beliebigen Strecke die benötigte Zeit anzugeben. Auf den gesuchten Zusammenhang lässt sich in der Regel leichter schließen, wenn die Daten grafisch dargestellt werden (Abbildung 2 rechts). Im Beispiel deutet sich an, dass die Messpunkte auf einer Parabel liegen. In

Worten ließe sich formulieren: „Der zurückgelegte Weg ist das Produkt aus einer Konstanten und der mit sich selbst multiplizierten Zeit“. Der Zusammenhang ist damit zutreffend beschrieben, seine Formulierung in Worten aber umständlich. Zudem ist selbst in diesem einfachen Fall unsere Alltagssprache unzureichend und es müssen spezielle Begriffe wie "multiplizieren" verwendet werden. Um physikalische Zusammenhänge beschreiben zu können, muss man sich einer besonderen Sprache bedienen, der Sprache der Mathematik: „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“ (Galileo Galilei, 1623).

Die Mathematik hat nicht nur ein eigenes Vokabular, sondern auch eine eigene Schrift. Die angesprochenen Größen werden mit Symbolen bezeichnet und durch Operatoren miteinander verknüpft. Auf diese Weise lassen sich Zusammenhänge sehr kompakt und übersichtlich darstellen. Im Beispiel des freien Falls etwa lässt sich formulieren $s = C \cdot t^2$ oder, noch kürzer,

$$s = C\ t^2.$$

Für den Weg wird hier das Symbol s verwendet, für die Konstante das Symbol C und für die Zeit das Symbol t. Das Symbol s ist abgeleitet vom lateinischen Wort „spatium“ für Länge, das Symbol t vom lateinischen Wort „tempus“ für Zeit.

Eine eingehendere Analyse zeigt, dass $C = \frac{1}{2}\, g$ ist, wobei g für den Betrag der lokalen Schwerebeschleunigung, den so genannten Ortsfaktor, steht:

$$s = \tfrac{1}{2}\, g\ t^2.$$

Solange eindeutig definiert ist, welches Symbol wofür steht, könnten auch andere Formulierungen gewählt werden wie

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\, \beta\ \gamma^2$$

mit α: Weg, β: Beschleunigung, γ: Zeit, oder

↔ = ½ Δ 🕐²

mit ↔: Weg, Δ: Beschleunigung, 🕐: Zeit.

Sinnvoller ist es selbstverständlich, sich an gewisse etablierte Konventionen zu halten.

Die Nutzung der Mathematik führt aber nicht nur zu einer kompakteren Darstellung von Zusammenhängen, sondern erlaubt auch eine Abstrahierung vom konkret betrachteten Vorgang. Beispielsweise ergibt sich die kinetische Energie eines Körpers der Masse m, der sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, als $W = \frac{1}{2}\, m\ v^2$. Die in einem Kondensator der Kapazität C bei Anliegen der Spannung U gespeicherte Energie ist $W = \frac{1}{2}\, C\ U^2$. Die mathematische Beschreibung ist in all diesen Beispielen ein und dieselbe. Es werden lediglich unterschiedliche Symbole verwendet. Vom konkreten Anwendungsfall losgelöst ließe sich auch sagen, dass sich die Werte der abhängigen Variable y aus den Werten der unabhängigen Variable x gemäß der quadratischen Funktion

$$y = a\ x^2$$

mit dem Parameter a ergeben.

Zusammenfassung:

- Messungen werden in der Physik durchgeführt, um über die spezielle Messsituation hinaus verallgemeinerte Aussagen zu gewinnen.
- Diese Aussagen in Worten zu formulieren, ist umständlich oder sogar unmöglich. Man benötigt die Sprache der Mathematik.
- In der Mathematik werden Größen symbolisch bezeichnet und durch Operatoren verknüpft. Dies führt zu einer wesentlich kompakteren Darstellung der Zusammenhänge.
- Ihr hoher Grad an Abstraktion macht die Mathematik außerdem äußerst flexibel einsetzbar. Verschiedenste Phänomen können mathematisch in ein und derselben Weise beschrieben werden.

Dazu kommt, dass sich Gleichungen durch mathematische Operationen so umformen lassen, dass sie für unterschiedliche Zwecke nutzbar werden. Dies ist das Thema des folgenden Abschnitts.

2 Äquivalenzumformungen

In Abschnitt 1 wurde die Gleichung $s = ½\, g\, t^2$ formuliert. Sie erlaubt es, den Weg s zu berechnen, wenn die Beschleunigung g und die Zeit t gegeben sind. Durch Umformung lassen sich aus dieser Gleichung nun aber weitere Gleichungen gewinnen, die andere Berechnungen erlauben: die Berechnung der Zeit t, wenn g und s gegeben sind, und die Berechnung der Beschleunigung g, wenn s und t bekannt sind. Der Wahrheitsgehalt der mathematischen Beziehung – links und rechts des Symbols „=“ stehen Ausdrücke, die gleich sind – muss dabei gewahrt bleiben. Man spricht von Äquivalenzumformungen.

Beispiel: Auflösen der Gleichung $s = ½\, g\, t^2$ nach t

1.) Beide Seiten der Gleichung mit 2 multiplizieren: $2\, s = g\, t^2$.

2.) Beide Seiten der Gleichung durch g dividieren: $\frac{2\, s}{g} = t^2$.

3.) Auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel ziehen: $\sqrt{\frac{2\, s}{g}} = t$ bzw. $t = \sqrt{\frac{2\, s}{g}}$.[1]

Dass zwei Gleichungen äquivalent sind, lässt sich durch das Symbol „⇔“ kenntlich machen.

Beispiel: $s = ½\, g\, t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2\, s}{g}}$.

Allgemein gilt, dass sich Gleichungen äquivalent umformen lassen, indem man auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Größe addiert oder subtrahiert, beide Seiten der Gleichung mit derselben Größe ungleich null multipliziert oder beide Seiten der Gleichung durch dieselbe Größe ungleich null dividiert.

Die Anwendung von Funktionen auf beide Seiten der Gleichung ist dann eine Äquivalenzumformung, wenn sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert. So ist es beispielsweise keine Äquivalenzumformung, die beiden Seiten der Gleichung $2\, x = 1$ zu quadrieren, denn die Ausgangsgleichung hat die Lösung ½, die quadrierte Gleichung $4\, x^2 = 1$ aber die Lösungen +½ und –½. In der Physik wird dieses Problem unter Umständen dadurch aufgehoben, dass Größen nicht jeden beliebigen Wert annehmen, die Zeit beispielsweise nicht negativ wird.

[1] Rein mathematisch gesehen müsste vor dem Wurzelzeichen ein Plusminuszeichen stehen. Physikalisch sinnvoll ist jedoch nur die positive Lösung.

3 Analyse und Lösen physikalischer Aufgaben

Physikaufgaben, die im Zusammenhang mit Lehrveranstaltungen gestellt werden, unterscheiden sich in mehrfacher Hinsicht von physikalischen Problemstellungen in der wissenschaftlichen Praxis:

- Es werden Ihnen nur Aufgaben gestellt, zu denen Sie alle Hintergründe kennengelernt haben. Sie wissen, dass die Aufgaben für Sie prinzipiell lösbar sind.
- Es wird Ihnen alle Information zur Verfügung stehen, die Sie zum Lösen der Aufgaben benötigen.
- Meistens wird Ihnen sogar nur genau diese und keine weitere Information gegeben, sodass Sie nicht zwischen benötigter und überflüssiger Information unterscheiden müssen.

Dies sollte Sie schon einmal grundsätzlich zuversichtlich stimmen. Wichtig ist darüber hinaus, dass Sie in Ihr Denken und in Ihr Herangehen an Aufgaben Struktur bringen. Orientieren Sie sich an den folgenden Leitfragen und Empfehlungen.

3.1 Textanalyse

- Welche Größen sind gegeben?
- Welche Größe ist gesucht?
- Sind spezielle Vorgaben gemacht, beispielsweise eine Skizze anzufertigen oder das Ergebnis in einer speziellen Einheit anzugeben?

Beispiel: Auf der Baustelle eines Hauses lässt ein Arbeiter in h = 30 m Höhe aus Versehen einen Hammer fallen. Mit welcher Geschwindigkeit v (in km/h) schlägt der Hammer auf dem Boden auf? Die Reibung beim Fall durch die Luft kann vernachlässigt werden.

gegeben: h = 30 m
gesucht: v in km/h

3.2 Materialsammlung

- Aus welchem Teilgebiet der Physik stammt die Aufgabe? Welche Gleichungen aus dem betreffenden Teilgebiet haben Sie in Ihrer Lehrveranstaltung kennengelernt?
- Enthalten diese Gleichungen Größen, die in der Aufgabenstellung vorkommen? Falls ja, könnten diese Gleichungen möglicherweise zur Lösung der Aufgabe beitragen.
- Interessant sind vor allem Gleichungen, welche die gesuchte Größe enthalten. Sind auch die übrigen Größen in dieser Gleichung bekannt? Falls ja, kann die Berechnung der gesuchten Größe mit dieser Gleichung erfolgen. Falls nein, müssen solche Größen, die nicht gegeben sind, über weitere Gleichungen ermittelt werden.
- Möglicherweise lassen sich Erhaltungssätze wie diejenigen für Energie oder Impuls anwenden.

Beispiel: geradlinige gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Beschleunigung	a = const.
Geschwindigkeit	v(t) = a t + v(0)
Ort	$r(t) = ½\, a\, t^2 + v(0)\, t + r(0)$

Werden die Zeit und der Ort ab dem Loslassen des Hammers gemessen, sind v(0) = 0, r(0) = 0 und r(t) = h.

Hier: a = g

$v(t) = g\,t$
$h = \frac{1}{2}\,g\,t^2$

$v(t) = g\,t$ reicht zur Berechnung der gesuchten Geschwindigkeit nicht aus, denn t ist nicht bekannt. Die Zeit t kommt allerdings auch in der Gleichung $h = \frac{1}{2}\,g\,t^2$ vor. h ist gegeben und g bekannt ($g = 9{,}81\ m/s^2$). Damit kann diese Gleichung verwendet werden, um die Zeit zu ermitteln:

$h = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$ (Abschnitt 2).

Alternativ könnte als physikalisches Thema auch die Energiewandlung erkannt werden. Während des Fallens wird potenzielle Energie $m\,g\,h$ in kinetische Energie $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ gewandelt. Wegen der Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes ist $m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2$. Durch Äquivalenzumformungen kann diese Gleichung nach v aufgelöst werden.

3.3 Entwickeln der mathematischen Lösung

- Entwickeln Sie die Lösung – möglicherweise durch Kombination mehrerer Gleichungen und durch Äquivalenzumformungen – zuerst in allgemeiner Form bzw. in symbolischer Darstellung. Dies geschieht über Gleichheitsbeziehungen, die in der Dokumentation des Lösungsweges mathematisch korrekt notiert werden müssen.
- Vereinfachen Sie die Gleichungen soweit wie möglich, etwa durch das Kürzen von Brüchen.
- Erst zum Schluss werden in diejenige Gleichung, welche die Lösung der Aufgabe darstellt, die gegebenen Werte eingesetzt. Dabei sind alle Werte mit ihrer Einheit zu versehen. Die Einheiten werden soweit wie möglich zusammengefasst und gekürzt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} v(t) &= g\,t \\ &= g\sqrt{\frac{2\,h}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{g^2\,2\,h}{g}} \\ &= \sqrt{2\,g\,h} \\ &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 30\,m} \\ &= 24\ m/s \\ &= \underline{\underline{86\ km/h}} \end{aligned}$$

Ab der zweiten Zeile wird die sich wiederholende linke Seite der Gleichung weggelassen, um Schreibarbeit zu sparen. Achten Sie darauf, dass die Gleichheitszeichen in einer Linie untereinander stehen. Nichts zu suchen haben in der Dokumentation einer mathematischen Lösung Notationen wie $v(t) = 24\ m/s \rightarrow 86\ km/h$.

3.4 Kontrolle

- Prüfen Sie, ob das Ergebnis plausibel ist. Dafür gibt es verschiedene Optionen.
  - Möglicherweise verfügen Sie über genügend Hintergrundwissen, um beurteilen zu können, ob ein Ergebnis stimmen kann oder nicht.

  - Einheiten mitzuführen ist nicht nur notwendig, damit Gleichungen physikalisch sinnvoll sind. Anhand der Einheiten können Sie möglicherweise auch erkennen, ob sich in Ihrer Lösung ein Fehler verbirgt. Prüfen Sie dazu, ob das Ergebnis auf dem von Ihnen dokumentierten Lösungsweg die richtige Einheit erhält.
  - Häufig sind Ergebnisse um ganzzahlige Zehnerpotenzen falsch, etwa weil fehlerhaft mit Zehnerpotenzen von Einheiten umgegangen oder der Taschenrechner falsch bedient wurde. Führen Sie zur Kontrolle eine Abschätzung der Größenordnung durch. Dazu werden alle Werte, die in die Berechnung eingehen, auf die nächste ganzzahlige Zehnerpotenz gerundet, z. B. alle Werte im Intervall [0; 5[auf $10^0 = 1$ und alle Werte im Intervall [5; 50[auf $10^1 = 10$. Mit ganzzahligen Zehnerpotenzen lässt sich in vielen mathematischen Zusammenhängen aber leicht rechnen, auch im Kopf und damit unabhängig vom eventuell zuvor verwendeten Taschenrechner, sodass die Größenordnung des Ergebnisses überprüft werden kann.
- Lesen Sie noch einmal den Aufgabentext und achten Sie darauf, ob alle gestellten Fragen beantwortet und alle Zusatzbedingungen, z. B. zur Verwendung einer bestimmten Einheit, erfüllt sind.

Beispiel: $v(t) = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\,\mathrm{m}}$

Einheitenanalyse[2]: $\left[\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\,\mathrm{m}}\right] = 1\sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}$

$= 1\ \mathrm{m/s}$

$= [v(t)]$

Abschätzen der Größenordnung: $\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\,\mathrm{m}} \approx \sqrt{1 \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\,\mathrm{m}}$

$\approx \sqrt{100}\ \mathrm{m/s}$

$\approx 10\ \mathrm{m/s}$

Das ist auch die Größenordnung des zuvor ausgewiesenen Ergebnisses von 24 m/s.

4 Weitere Hinweise

Ohne Mathematik läuft in der Physik so gut wie nichts. Wenn Sie Schwierigkeiten mit der Physik haben, liegt das möglicherweise gar nicht an der Physik, sondern an der Mathematik. Sollten Sie beispielsweise nicht mit Zehnerpotenzen umzugehen wissen oder Probleme damit haben, Gleichungen umzuformen, so müssen Sie versuchen, diese Lücken in Ihren mathematischen Grundkenntnissen möglichst schnell zu schließen. Fehler können aber auch dadurch entstehen, dass Sie Lösungswege nachlässig dokumentieren oder das korrekte Mitführen von Einheiten unterlassen. Diese Probleme zu beheben, verlangt von Ihnen lediglich etwas mehr Selbstdisziplin.

Beschränken Sie die Arbeit für Ihr Physikmodul nicht darauf, sich Musterlösungen zu einigen Standardaufgaben anzuschauen und möglicherweise auswendig zu lernen. Damit verfehlen Sie in jedem Fall die Modulziele. Nur wenn Sie sich Hintergrundwissen aneignen, nur wenn Sie wenigstens etwas an übergreifendem Verständnis für physikalische Zusammenhänge entwickeln, verfügen Sie über ausreichend Flexibilität, um auch auf andere, unvorhergesehen Fragestellungen erfolgreich reagieren zu können.

Skripte und Übungsaufgaben zur Physik finden Sie beispielsweise unter der Internet-Adresse aufgabomat.de.

---

[2] Um die Einheit einer Größe zu bezeichnen, wird die betreffende Größe in eckige Klammern gesetzt.