

1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A) P(B | A)$, Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Satz von Bayes:
$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + P(B | \bar{A}) P(\bar{A})} = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B | A) P(A) + [1 - P(\bar{B} | \bar{A})] [1 - P(A)]}$$

Anzahl Möglichkeiten, einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu entnehmen:

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
Variation (geordnete Stichprobe)	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Kombination (ungeordnete Stichprobe)	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2 Wahrscheinlichkeits(dichte)- und Verteilungsfunktion

	diskrete Zufallsvariablen	stetige Zufallsvariablen
Wahrscheinlichkeits(dichte)funktion	$f(x_i) = P(X = x_i)$	$f(x)$
Normierungsbedingung	$\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
Verteilungsfunktion	$F(x_i) = \sum_{k=1}^i f(x_k)$	$F(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x) dx$

Binomialverteilung: $f(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Poisson-Verteilung: $f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Verteilungsfunktion der Poisson-Verteilung:

k	λ																	
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
0	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368	0,333	0,301	0,273	0,247	0,223	0,202	0,183	0,165
1	0,995	0,982	0,963	0,938	0,910	0,878	0,844	0,809	0,772	0,736	0,699	0,663	0,627	0,592	0,558	0,525	0,493	0,463
2	1,000	0,999	0,996	0,992	0,986	0,977	0,966	0,953	0,937	0,920	0,900	0,879	0,857	0,833	0,809	0,783	0,757	0,731
3	1,000	1,000	0,999	0,998	0,998	0,997	0,994	0,991	0,987	0,981	0,974	0,966	0,957	0,946	0,934	0,921	0,907	0,891
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,996	0,995	0,992	0,989	0,986	0,981	0,976	0,970	0,964
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,998	0,997	0,996	0,994	0,992	0,990
k	λ																	
	1,9	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0
0	0,150	0,135	0,082	0,050	0,030	0,018	0,011	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,434	0,406	0,287	0,199	0,136	0,092	0,061	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,704	0,677	0,544	0,423	0,321	0,238	0,174	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000
3	0,875	0,857	0,758	0,647	0,537	0,433	0,342	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010	0,005	0,002	0,001	0,000	0,000
4	0,956	0,947	0,891	0,815	0,725	0,629	0,532	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,029	0,015	0,008	0,004	0,002	0,001
5	0,987	0,983	0,958	0,916	0,858	0,785	0,703	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067	0,038	0,020	0,011	0,006	0,003
6	0,997	0,995	0,986	0,966	0,935	0,889	0,831	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130	0,079	0,046	0,026	0,014	0,008
7	0,999	0,999	0,996	0,988	0,973	0,949	0,913	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220	0,143	0,090	0,054	0,032	0,018
8	1,000	1,000	0,999	0,996	0,990	0,979	0,960	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333	0,232	0,155	0,100	0,062	0,037
9	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,992	0,983	0,968	0,916	0,830	0,717	0,587	0,458	0,341	0,242	0,166	0,109	0,070
10	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,993	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583	0,460	0,347	0,252	0,176	0,118
11	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,995	0,980	0,947	0,888	0,803	0,697	0,579	0,462	0,353	0,260	0,185
12	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,991	0,973	0,936	0,876	0,792	0,689	0,576	0,463	0,358	0,268
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,987	0,966	0,926	0,864	0,781	0,682	0,573	0,464	0,363
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,983	0,959	0,917	0,854	0,772	0,675	0,570	0,466
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,992	0,978	0,951	0,907	0,844	0,764	0,669	0,568
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,973	0,944	0,899	0,835	0,756	0,664
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995	0,986	0,968	0,937	0,890	0,827	0,749
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,993	0,982	0,963	0,930	0,883
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,991	0,979	0,957	0,923
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995	0,988	0,975	0,952	0,917

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:

	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999

Z-Transformation: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

- Exponentialverteilung: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- Weibull-Verteilung: $F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^k}$
- Gumbel-Verteilung: $F(x) = e^{-e^{-(x-a)/b}}$

3 Lageparameter

	diskrete Zufallsvariablen	stetige Zufallsvariablen
Erwartungswert	$E(X) = \sum_{i=1}^n f(x_i) x_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x dx$
Varianz	$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n f(x_i) [x_i - E(X)]^2$	$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [x - E(X)]^2 dx$

	Erwartungswert	Varianz
Binomialverteilung	$n p$	$n p q$
Poisson-Verteilung	λ	λ
Exponentialverteilung	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Normalverteilung	μ	σ^2

empirischer Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, empirische Varianz $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

$E(\bar{X}) = E(X)$, $\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}(X)/n$

$$\mu = \bar{X} \pm t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Quantile t_p der t-Verteilung:

f	p					f	p				
	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995		0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	26	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76
14	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98	30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	50	1,30	1,68	2,01	2,40	2,68
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	70	1,29	1,67	1,99	2,38	2,65
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	100	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

Quantile F_p der F-Verteilung:

f ₁	p	f ₂															
		4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	30	40	50	100	∞
4	0,950	6,4	5,2	4,5	4,1	3,8	3,6	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4
	0,975	9,6	7,4	6,2	5,5	5,1	4,7	4,5	4,1	3,9	3,7	3,5	3,2	3,1	3,1	2,9	2,8
	0,990	16	11	9,1	7,8	7,0	6,4	6,0	5,4	5,0	4,8	4,4	4,0	3,8	3,7	3,5	3,3
5	0,950	6,3	5,1	4,4	4,0	3,7	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,7	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2
	0,975	9,4	7,1	6,0	5,3	4,8	4,5	4,2	3,9	3,7	3,5	3,3	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6
	0,990	16	11	8,7	7,5	6,6	6,1	5,6	5,1	4,7	4,4	4,1	3,7	3,5	3,4	3,2	3,0
6	0,950	6,2	5,0	4,3	3,9	3,6	3,4	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1
	0,975	9,2	7,0	5,8	5,1	4,7	4,3	4,1	3,7	3,5	3,3	3,1	2,9	2,7	2,7	2,5	2,4
	0,990	15	11	8,5	7,2	6,4	5,8	5,4	4,8	4,5	4,2	3,9	3,5	3,3	3,2	3,0	2,8
7	0,950	6,1	4,9	4,2	3,8	3,5	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
	0,975	9,1	6,9	5,7	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,4	3,2	3,0	2,7	2,6	2,6	2,4	2,3
	0,990	15	10	8,3	7,0	6,2	5,6	5,2	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	3,1	3,0	2,8	2,6
8	0,950	6,0	4,8	4,1	3,7	3,4	3,2	3,1	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
	0,975	9,0	6,8	5,6	4,9	4,4	4,1	3,9	3,5	3,3	3,1	2,9	2,7	2,5	2,5	2,3	2,2
	0,990	15	10	8,1	6,8	6,0	5,5	5,1	4,5	4,1	3,9	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,5
9	0,950	6,0	4,8	4,1	3,7	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9
	0,975	8,9	6,7	5,5	4,8	4,4	4,0	3,8	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1
	0,990	15	10	8,0	6,7	5,9	5,4	4,9	4,4	4,0	3,8	3,5	3,1	2,9	2,8	2,6	2,4
10	0,950	6,0	4,7	4,1	3,6	3,3	3,1	3,0	2,8	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8
	0,975	8,8	6,6	5,5	4,8	4,3	4,0	3,7	3,4	3,1	3,0	2,8	2,5	2,4	2,3	2,2	2,0
	0,990	15	10	7,9	6,6	5,8	5,3	4,8	4,3	3,9	3,7	3,4	3,0	2,8	2,7	2,5	2,3
12	0,950	5,9	4,7	4,0	3,6	3,3	3,1	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8
	0,975	8,8	6,5	5,4	4,7	4,2	3,9	3,6	3,3	3,1	2,9	2,7	2,4	2,3	2,2	2,1	1,9
	0,990	14	9,9	7,7	6,5	5,7	5,1	4,7	4,2	3,8	3,6	3,2	2,8	2,7	2,6	2,4	2,2
14	0,950	5,9	4,6	4,0	3,5	3,2	3,0	2,9	2,6	2,5	2,4	2,2	2,0	1,9	1,9	1,8	1,7
	0,975	8,7	6,5	5,3	4,6	4,1	3,8	3,6	3,2	3,0	2,8	2,6	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
	0,990	14	9,8	7,6	6,4	5,6	5,0	4,6	4,1	3,7	3,5	3,1	2,7	2,6	2,5	2,3	2,1
16	0,950	5,8	4,6	3,9	3,5	3,2	3,0	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,0	1,9	1,9	1,7	1,6
	0,975	8,6	6,4	5,2	4,5	4,1	3,7	3,5	3,2	2,9	2,8	2,5	2,3	2,2	2,1	1,9	1,8
	0,990	14	9,7	7,5	6,3	5,5	4,9	4,5	4,0	3,6	3,4	3,1	2,7	2,5	2,4	2,2	2,0
20	0,950	5,8	4,6	3,9	3,4	3,2	2,9	2,8	2,5	2,4	2,3	2,1	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6
	0,975	8,6	6,3	5,2	4,5	4,0	3,7	3,4	3,1	2,8	2,7	2,5	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7
	0,990	14	9,6	7,4	6,2	5,4	4,8	4,4	3,9	3,5	3,3	2,9	2,5	2,4	2,3	2,1	1,9
30	0,950	5,7	4,5	3,8	3,4	3,1	2,9	2,7	2,5	2,3	2,2	2,0	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5
	0,975	8,5	6,2	5,1	4,4	3,9	3,6	3,3	3,0	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9	1,9	1,7	1,6
	0,990	14	9,4	7,2	6,0	5,2	4,6	4,2	3,7	3,3	3,1	2,8	2,4	2,2	2,1	1,9	1,7
40	0,950	5,7	4,5	3,8	3,3	3,0	2,8	2,7	2,4	2,3	2,2	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4
	0,975	8,4	6,2	5,0	4,3	3,8	3,5	3,3	2,9	2,7	2,5	2,3	2,0	1,9	1,8	1,6	1,5
	0,990	14	9,3	7,1	5,9	5,1	4,6	4,2	3,6	3,3	3,0	2,7	2,3	2,1	2,0	1,8	1,6
50	0,950	5,7	4,4	3,8	3,3	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4
	0,975	8,4	6,1	5,0	4,3	3,8	3,5	3,2	2,9	2,6	2,5	2,2	2,0	1,8	1,8	1,6	1,4
	0,990	14	9,2	7,1	5,9	5,1	4,5	4,1	3,6	3,2	3,0	2,6	2,2	2,1	1,9	1,7	1,5
100	0,950	5,7	4,4	3,7	3,3	3,0	2,8	2,6	2,3	2,2	2,1	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2
	0,975	8,3	6,1	4,9	4,2	3,7	3,4	3,2	2,8	2,6	2,4	2,2	1,9	1,7	1,7	1,5	1,3
	0,990	14	9,1	7,0	5,8	5,0	4,4	4,0	3,5	3,1	2,9	2,5	2,1	1,9	1,8	1,6	1,4
∞	0,950	5,6	4,4	3,7	3,2	2,9	2,7	2,5	2,3	2,1	2,0	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,0
	0,975	8,3	6,0	4,8	4,1	3,7	3,3	3,1	2,7	2,5	2,3	2,1	1,8	1,6	1,5	1,3	1,0
	0,990	13	9,0	6,9	5,6	4,9	4,3	3,9	3,4	3,0	2,8	2,4	2,0	1,8	1,7	1,4	1,0

Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung:

f	p			f	p		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
1	2,7	3,8	6,6	11	17,3	19,7	24,7
2	4,6	6,0	9,2	12	18,5	21,0	26,2
3	6,3	7,8	11,3	13	19,8	22,4	27,7
4	7,8	9,5	13,3	14	21,1	23,7	29,1
5	9,2	11,1	15,1	15	22,3	25,0	30,6
6	10,6	12,6	16,8	16	23,5	26,3	32,0
7	12,0	14,1	18,5	17	24,8	27,6	33,4
8	13,4	15,5	20,1	18	26,0	28,9	34,8
9	14,7	16,9	21,7	19	27,2	30,1	36,2
10	16,0	18,3	23,2	20	28,4	31,4	37,6

4 Statistische Tests

Test	Voraussetzungen	Prüfwert
Parametertest für den Erwartungswert	X ist normalverteilt.	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
F-Test	X_1 und X_2 sind normalverteilt und unabhängig voneinander.	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$
t-Test	X_1 und X_2 <ul style="list-style-type: none"> • sind normalverteilt • sind unabhängig voneinander • besitzen dieselbe Varianz. 	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$

Chi-Quadrat-Test als Verteilungstest:

- Absolute Häufigkeit n_i der n Messwerte in k Klassen bzw. Intervallen ermitteln ($i = 1, \dots, k$)
- Null- und Alternativhypothese formulieren und Parameter der hypothetischen Verteilungsfunktion $F_0(x)$ mit Hilfe der Messwerte abschätzen
- Auf Basis der Verteilungsfunktion $F_0(x)$ hypothetische absolute Häufigkeiten n_i^* in den vorgegebenen k Klassen berechnen
- Klassen so zusammenfassen, dass n_i^* überall mindestens 5 beträgt

Prüfwert (Wert der Teststatistik): $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k^*} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$ (k^* : Anzahl der Klassen)

Falls H_0 zutrifft, ist χ^2 der Wert einer Chi-Quadrat-verteilten Zufallsvariablen mit dem Freiheitsgrad $f = k^* - 1$ - Anzahl der empirisch bestimmten Parameter der hypothetischen Verteilung.