HOCHSCHULE
WEIHENSTEPHAN-TRIESDORF
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Prof. Dr. Klaus Eckhardt

Messunsicherheit

Inhalt

Vorwort

Jeder Messwert weist eine gewisse Unsicherheit auf. Eine Information darüber, wie groß diese ist, ist unerlässlich, um beurteilen zu können, wie weit man einem Messwert vertrauen und ihn für weitergehende Analysen verwenden kann.

Dennoch wird die Analyse der Messunsicherheit häufig vernachlässigt, ob aus Bequemlichkeit oder aus Unkenntnis. Dazu kommt, dass im deutschen Sprachraum immer noch der irreführende Begriff „Fehler" verwendet und von „Messfehlern“ und „Fehlerfortpflanzung“ gesprochen wird. Als Fehler wäre eine Abweichung zwischen einem Messwert und dem „wahren Wert” der Messgröße zu bezeichnen. Ein solcher wahrer Wert lässt sich aber niemals bestimmen. Es werden sich immer nur Schätzwerte für diesen eigentlich gesuchten Wert der Messgröße ermitteln lassen. Ob ein solcher Schätzwert überhaupt einen Fehler aufweist und wie groß er gegebenenfalls ist, lässt sich nicht sagen. Dass der Schätzwert unsicher ist, ist dagegen klar. Thema des vorliegenden Dokuments ist, wie diese Unsicherheit bestimmt und angegeben werden sollte.

Grundlage ist dabei „der GUM", ein international anerkannter Leitfaden zur Analyse der Messunsicherheit. Sein vollständiger Titel lautet „Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement”. Er wurde durch das Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM) erarbeitet, einem gemeinsamen Ausschuss folgender Institutionen:

- Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)
- Internationale Elektrotechnische Kommission (IEC)
- International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine (IFCC)
- International Laboratory Accreditation Cooperation
- Internationale Organisation für Normung (ISO)
- Internationale Union für reine und angewandte Chemie (IUPAC)
- Internationale Union für reine und angewandte Physik (IUPAP)
- Internationale Organisation für das gesetzliche Messwesen (OIML).

Die Inhalte des GUM werden hier einerseits nur stark verkürzt dargestellt. Andererseits wird ausführlicher auf die statistischen Grundlagen der Bestimmung der Messunsicherheit eingegangen (Abschnitte 2 und 3.1). Übungsaufgaben zum Thema Messunsicherheit finden sich unter anderem unter der Internet-Adresse aufgabomat.de in der Rubrik Physik.

1 Einführung

Ziel einer Messung ist es, den Wert einer Messgröße zu ermitteln. Allerdings ist keine Messung absolut genau. Einige der möglichen Gründe hierfür sind:

- unvollständige Kenntnis darüber, wie Einflussgrößen auf das Messergebnis einwirken
- unzureichende Erfassung und Kontrolle der Einflussgrößen
- Ungenauigkeiten bei der Ablesung analoger Messinstrumente
- beschränkte Auflösung der Messinstrumente
- fehlerhafte Kalibrierung der Messinstrumente.

Als **Messabweichung** bezeichnet man die Differenz eines Messwerts zum eigentlich gesuchten Wert der Messgröße. Es gibt zwei Arten der Messabweichung:

- Eine **zufällige Messabweichung** führt zu unvorhersehbaren, zufälligen Variationen bei wiederholter Beobachtung der Messgröße - vorausgesetzt, das Messsystem hat eine ausreichend hohe Auflösung, um zwischen den Werten unterscheiden zu können. Der Beitrag einer zufälligen Messabweichung zur Messunsicherheit kann durch wiederholte Messung reduziert werden. Messwerte, die allein eine zufällige Messabweichung aufweisen, streuen um den gesuchten, tatsächlichen Wert der Messgröße.

- Das Messsystem kann Anzeigewerte liefern, die nicht um den Wert der Messgröße streuen, sondern um einen demgegenüber verschobenen Wert. Der Unterschied zwischen dem verschobenen Wert und dem tatsächlichen Wert einer Größe wird **systematische Messabweichung** genannt. Falls die systematische Messabweichung bestimmt werden kann und falls sie im Rahmen der geforderten Messgenauigkeit relevant ist, sollten die Messwerte um diese Abweichung korrigiert werden.

Da das Ergebnis einer Messung im Allgemeinen nur eine Näherung für den Wert der Messgröße darstellt, ist es nur zusammen mit einer Aussage über die **Messunsicherheit** vollständig[1]. Diese ist ein Maß dafür, wie gut man den wahren Wert der Messgröße zu kennen glaubt.

Die Messunsicherheit weist unterschiedliche Komponenten auf, die sich in zwei Kategorien (Typ A und Typ B) unterteilen lassen, je nachdem, wie diese Beiträge zur Messunsicherheit bestimmt werden. In beiden Fällen werden die Beiträge zur Messunsicherheit als Varianzen oder Standardabweichungen berechnet und angegeben. Im Fall einer **Unsicherheit des Typs A** wird die Messunsicherheit ebenso wie der Schätzwert für die Messgröße aus den Ergebnissen wiederholter Messungen unter weitgehend gleichbleibenden Bedingungen berechnet. Im Fall einer **Unsicherheit des Typs B** dienen andere verfügbare Informationen dazu, die Messunsicherheit zu ermitteln.

2 Statistische Grundlagen

2.1 Zufallsvariablen

Bei mehrfacher Wiederholung einer Messung erhält man im Allgemeinen zufällig variierende Resultate. Man spricht davon, dass die Messwerte Werte einer **Zufallsvariablen** sind.

Zufallsvariablen werden in der Statistik symbolisch mit einem Großbuchstaben bezeichnet, z. B. mit X. Als Symbol für einen Wert der Zufallsvariablen wird konventionsgemäß der zugehörige Kleinbuchstabe verwendet, z. B. x.

Da sich im Allgemeinen von Messung zu Messung unterschiedliche Werte ergeben, stellt sich die Frage, welchen Wert die Messgröße X tatsächlich hat. Dieser eigentlich interessierende wahre Wert der Größe wird in der Statistik als der **Erwartungswert** E(X) der Zufallsvariablen X bezeichnet. Die statistische Analyse von Messwerten dient meistens dazu, eine Aussage über einen solchen Erwartungswert zu gewinnen, und zwar möglichst nicht nur einen einzelnen Näherungswert, sondern dazu auch eine Information über die Genauigkeit der gewonnenen Aussage.

[1] Der Begriff „Messfehler“ sollte, wie im Vorwort begründet, nicht verwendet werden.

2.2 Wahrscheinlichkeitsdichte

Stellen Sie sich eine Ansammlung von Materie in einem Bereich V des dreidimensionalen Raums vor. Materie besitzt Masse, und so lässt sich die Materieansammlung dadurch beschreiben, wie sich die Masse in diesem Raum verteilt. Einem Punkt lässt sich keine Masse zuordnen, denn ein Punkt hat keine räumliche Ausdehnung, aber die Masse von Volumenelementen kann erfasst und angegeben werden.

Nehmen wir an, der Raumbereich V wird in eine endliche Zahl n von Volumenelementen

$$\Delta V_k = \Delta x_k \, \Delta y_k \, \Delta z_k$$

unterteilt, deren Position durch die Koordinaten x_k, y_k und z_k angegeben werde. Hat das Volumenelement ΔV_k die Masse Δm_k, so lässt sich für dieses Volumenelement die Massendichte $\rho(x_k,y_k,z_k) = \Delta m_k/\Delta V_k$ ermitteln. Ist umgekehrt die Massendichte $\rho(x_k,y_k,z_k)$ gegeben, so lässt sich die Masse des Volumenelements berechnen als

$$\begin{aligned}\Delta m_k &= \rho(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k \\ &= \rho(x_k,y_k,z_k)\,\Delta x_k \, \Delta y_k \, \Delta z_k\,.\end{aligned}$$

Die Gesamtmasse im Raumbereich V ist dann

$$m(V) = \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k)\,\Delta x_k \, \Delta y_k \, \Delta z_k\ .$$

Allerdings ist dies eine relativ grobe Beschreibung der Materieansammlung, denn die Massendichte $\rho(x_k,y_k,z_k)$ gibt nur die über das Raumelement $\Delta V_k = \Delta x_k \, \Delta y_k \, \Delta z_k$ gemittelten Verhältnisse wieder. Die *lokalen* Verhältnisse werden umso genauer beschrieben, je kleiner ΔV_k ist. Werden die einzelnen Volumenelemente kleiner, so steigt zugleich ihre Anzahl, d. h. man muss die Anzahl n der Volumenelemente erhöhen und letztlich zum Grenzfall $n \to \infty$ übergehen:

$$m(V) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k)\,\Delta x_k \, \Delta y_k \, \Delta z_k$$

Für den Grenzwert auf der rechten Seite dieser Gleichung ist in der Mathematik eine abkürzende Schreibweise eingeführt worden:

$$m(V) = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Es wird im Folgenden nicht darum gehen, sich näher mit solchen Dreifachintegralen zu befassen. An dieser Stelle sollten Sie aber verstanden haben, dass sich die Masse m im Raumbereich V durch Integration der lokal variierenden Massendichte ρ über diesen Raumbereich berechnet.

Jetzt zur Statistik. Identifizieren Sie
- den dreidimensionalen Raum mit der Menge |R der reellen Zahlen
- Punkte des Raums mit einzelnen Zahlen $x \in$ |R
- den Raumbereich V mit einem Zahlenbereich, einem Intervall [a; b].

Die Betrachtung wird dadurch erleichtert, dass sich die Menge der reellen Zahlen als eindimensionaler Raum auffassen lässt: Um die Position einer Zahl in der Menge der reellen Zahlen zu beschreiben, reicht eine Koordinatenachse aus, der Zahlenstrahl.

Keine Zufallsvariable nimmt sämtliche reellen Werte mit ein und derselben Wahrscheinlichkeit an. So, wie eine Materieansammlung mit einer bestimmten Verteilung von Masse im dreidimensionalen Raum verbunden ist, ist eine Zufallsvariable mit einer bestimmten Verteilung von Wahrscheinlichkeit in der Menge der reellen Zahlen verbunden. Und so, wie sich eine Massendichte ρ(x,y,z) definieren und die Masse in einem Raumbereich V dadurch berechnen lässt, dass man die Massendichte über V integriert, lässt sich eine Wahrscheinlichkeitsdichte f(x) definieren und die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert in einem Intervall [a; b] annimmt, berechnen als

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

Die Funktion f(x) wird als **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** bezeichnet. Wahrscheinlichkeiten, mit denen Zufallsvariablen Werte in bestimmen Intervallen annehmen, entsprechen Flächen unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

Kennt man die Wahrscheinlichkeitsdichte, durch die eine Zufallsvariable X beschrieben wird, lässt sich gemäß Gleichung 1 prinzipiell jede Wahrscheinlichkeit für die betreffende Zufallsvariable berechnen. Das zentrale Ziel der Statistik besteht daher immer wieder darin, diese Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu identifizieren.

Hier abschließend die in diesem Abschnitt analog angeführten Größen noch einmal in der Übersicht:

dreidimensionaler Raum	-	Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen
Punkt im Raum	-	Zahl $x \in \mathbb{R}$
Raumbereich V	-	Zahlenbereich bzw. Intervall [a; b]
Materieansammlung	-	Zufallsvariable
Masse	-	Wahrscheinlichkeit
Massendichte $\rho(x,y,z)$	-	Wahrscheinlichkeitsdichte f(x)
$m(V) = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$	-	$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Die Analogie geht sogar noch weiter: Der Erwartungswert der Zufallsvariablen entspricht dem Schwerpunkt der Materieansammlung.

2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihre Kenngrößen

Viele Zufallsvariablen sind **normalverteilt**. So bezeichnet man Zufallsvariablen, deren Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion die Form

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (2)$$

hat. "exp" steht für die Exponentialfunktion mit der Basis e ($\exp(x) = e^x$).

Die Normalverteilung hat zwei Parameter:

- Der **Mittelwert** μ gibt an, wo das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion liegt.
- Die **Standardabweichung** σ bestimmt die Breite der Verteilung. Sie ist gleich dem Abstand des Mittelwerts von den beiden Wendepunkten auf den Flanken der Funktionskurve (Abbildung 1).

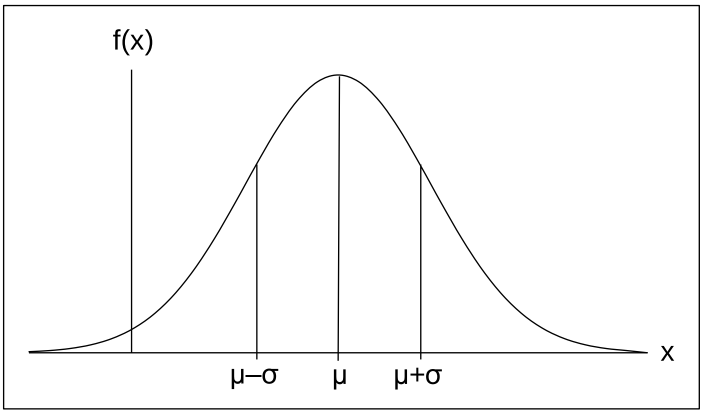

Abbildung 1: Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung.

Die Normalverteilung ist besonders wichtig. Warum dies so ist, wird durch den so genannten **Zentralen Grenzwertsatz** der Wahrscheinlichkeitsrechnung begründet. Dieser besagt: Setzt sich eine Zufallsvariable additiv aus einer großen Zahl beliebig verteilter, stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen zusammen, so ist sie selbst näherungsweise normalverteilt.

Messwerte stellen in der Regel Zufallsvariablen dar, die vielfältigen Einflüssen unterliegen wie Ableseungenauigkeiten oder variierende Rahmenbedingungen während der Versuchsdurchführung. In solchen Messwerten vereinigt sich also additiv eine Vielzahl von Störgrößen, die ihrerseits Zufallsvariablen darstellen. Die Messwerte selbst sind dann nach dem Grenzwertsatz zumindest näherungsweise normalverteilt.

Es gibt jedoch auch viele Zufallsvariablen, die durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer anderen Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben werden müssen. Beispiele für weitere Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind die t-Verteilung, F-Verteilung, Chi-Quadrat-Verteilung, Weibull-Verteilung, Gumbel-Verteilung oder Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Einige Verteilungen haben nur einen, andere ebenso wie die Normalverteilung zwei Parameter. Unabhängig davon lässt sich jede Verteilung durch den Erwartungswert E(X) (den „Schwerpunkt") der beschriebenen Zufallsvariablen X sowie ein Maß für die Streuung der Variablenwerte um diesen Erwartungswert herum charakterisieren. Als dieses Maß dient in der Statistik die so genannte **Varianz** Var(X) der Zufallsvariablen oder die Quadratwurzel aus der Varianz, die so genannte **Standardabweichung** $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. Ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f(x) bekannt, so berechnen sich Erwartungswert und Varianz als

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x\, dx \qquad (3)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, [x - E(X)]^2\, dx\,. \qquad (4)$$

Die Namensgleichheit der Standardabweichung $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ mit dem Parameter σ der Normalverteilung weist darauf hin, dass diese beiden Größen im Spezialfall der Normalverteilung identisch sind ($\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$). Außerdem stimmt der Parameter μ einer normalverteilten Variablen X mit dem Erwartungswert E(X) der Variablen überein. Bei anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist dies anders. Die Exponentialverteilung beispielsweise hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$) mit dem einen Parameter λ, aus dem sich Erwartungswert und Varianz berechnen als $E(X) = 1/\lambda$ und $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$. Hier tritt also die Besonderheit auf, dass Erwartungswert und Standardabweichung übereinstimmen.

3 Standardunsicherheit

3.1 Messunsicherheit des Typs A

Eine Messgröße werde durch N voneinander unabhängigen Messungen erfasst. Die Resultate X_i der einzelnen Messungen i = 1, …, N stellen Werte einer Zufallsvariablen X dar (Abschnitt 2.1). Falls keine systematische Messabweichung vorliegt oder falls eine solche systematische Abweichung vollständig korrigiert werden konnte, ist der Erwartungswert E(X) der Zufallsvariablen X der gesuchte Wert der Messgröße.

Das Ergebnis der Messwertanalyse ist anzugeben als Schätzwert für die Messgröße bzw. für den Erwartungswert E(X) und die beigeordnete Messunsicherheit. Im Fall einer Messunsicherheit des Typs A lässt sich der Schätzwert für den Erwartungswert E(X) berechnen als

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i\,. \qquad (5)$$

Dies ist der so genannte **empirische Mittelwert** der Zufallsvariablen. Je größer die Anzahl der Messwerte, auf denen die Analyse basiert, desto genauer ist der Schätzwert. Es gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \overline{X} = E(X).$$

Der empirischer Mittelwert $\overline{X}$ ist ebenfalls eine Zufallsvariable, die unterschiedliche Werte annimmt, je nachdem, welche Werte sich zufällig bei den Messungen ergeben haben.

Im Fall einer Messunsicherheit des Typs A wird die Messunsicherheit durch einen Schätzwert für die Standardabweichung $\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X})}$ des empirischen Mittelwerts $\overline{X}$ charakterisiert. Dieser Schätzwert lässt sich aus den einzelnen Messwerten X_i berechnen als

$$S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{1}{N\,(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2} \,. \tag{6}$$

Es handelt sich um die so genannte **empirische Standardabweichung** der Zufallsvariablen $\overline{X}$. Auch hier gilt wieder, dass der Schätzwert umso genauer ist, je mehr Messwerte vorliegen:

$$\lim_{N\to\infty} S_{\overline{X}} = \sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X})} \,.$$

Wer bereits einmal etwas über die Standardabweichung gehört hat, wird sich möglicherweise darüber wundern, dass in Gleichung 6 unter der Wurzel nicht nur durch N − 1, sondern durch N (N − 1) geteilt wird. Sie werden auf Ihrem Taschenrechner sehr wahrscheinlich auch keine Funktion zur Berechnung von $S_{\overline{X}}$ finden. Diejenige Gleichung, die Sie kennen und für die eine Funktion auf wissenschaftlichen Taschenrechnern implementiert ist, lautet

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2} \,. \tag{7}$$

Der Vergleich mit Gleichung 6 zeigt, dass

$$S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{N}} \tag{8}$$

gilt. S ist die empirische Standardabweichung der Einzelwerte, d. h. ein Maß für die Streuung bzw. Unsicherheit der einzelnen Werte X_i der Zufallsvariablen X. Hier aber geht es nicht um eine Aussage über die Einzelwerte, sondern um eine Aussage über den Schätzwert $\overline{X}$ für den Erwartungswert E(X)! Da die Zufallsvariable $\overline{X}$ dadurch entsteht, dass man mehrere Einzelwerte X_i zusammenfasst, streuen ihre Werte weniger als die Einzelwerte X_i. Dies drückt sich darin aus, dass in Gleichung 6 unter der Wurzel zusätzlich durch N zu teilen ist bzw. Gleichung 8 gilt.

Im Zusammenhang mit der Angabe von Messunsicherheiten spricht man statt von der empirischen Standardabweichung des Mittelwerts auch von der **Standardunsicherheit** und bezeichnet diese mit u. Als Messergebnis werden angegeben

- der empirische Mittelwert bzw. das arithmetische Mittel $\overline{X}$ der Messwerte (Gleichung 5) und
- die Standardunsicherheit $u = S_{\overline{X}}$ (Gleichung 6).

3.2 Messunsicherheit des Typs B

Liegen für eine Größe keine wiederholten Messungen vor, welche die im vorigen Abschnitt dargestellten Berechnungen erlauben, so wird die Standardunsicherheit auf Basis anderer verfügbarer Informationen über die Messgröße abgeschätzt. Wichtige Informationsquellen sind:

- Auflösung der Instrumentenanzeige

  Beim Ablesen der Messwerte von der Skala eines Messinstrumentes besteht eine **Ableseunsicherheit**, von der üblicherweise angenommen wird, dass sie der Hälfte der kleinsten Skaleneinheit entspricht. Bei Verwendung einer Stoppuhr mit Zehntelsekundenskala ist beispielsweise eine Unsicherheit von mindestens 0,05 s anzusetzen, bei Verwendung eines Längenmaßstabs mit Millimeterskala eine Unsicherheit von mindestens 0,5 mm. Eine entsprechende Unsicherheit wird auch bei Digitalanzeigen angenommen. Beachten Sie, dass in der Regel weitere Unsicherheiten hinzukommen. Wird beispielweise eine Zeit manuell gestoppt, so wird die Messung auch durch die ungenaue Wahrnehmung des Experimentators und seine möglicherweise verzögerte Reaktion beeinflusst.

- Angaben in Bedienungsanleitungen, Handbüchern oder Kalibrierzertifikaten

  Es gibt systematische Messabweichungen, die auf der bautechnisch begrenzten Genauigkeit der verwendeten Instrumente beruhen und sich nicht korrigieren lassen.

  Im Fall von Messgeräten mit Ziffernanzeige ist von der **Messgenauigkeit** oder der **systematischen Restunsicherheit** die Rede. Diese ist in der Regel der Bedienungsanleitung des Geräts zu entnehmen. Sie wird dort angegeben in Prozent des Messwertes zuzüglich eines oder mehrerer „Digit" (auch „Counts"). Digit sind Stufen in der letzten Stelle des angezeigten Zahlenwertes. Die Angabe ±(1% + 5 dgts) beispielsweise bedeutet, dass ein Messwert von 3,21 eine maximale gerätebedingte Messabweichung von $\Delta x = 0{,}01 \cdot 3{,}21 + 0{,}05 = 0{,}08$ aufweist. Fehlt eine Angabe, ist die systematische Restunsicherheit mit mindestens 1 Digit anzusetzen.

  Im Fall von Messgeräten mit Skalenanzeige ist möglicherweise die **Genauigkeitsklasse** spezifiziert. Diese richtet sich ebenfalls danach, welche Abweichung eines Messwertes vom Wert der Messgröße unter Normalbedingungen (z. B. einer Temperatur zwischen 20 °C und 23 °C) maximal zu erwarten ist. Die genaue Definition variiert je nach Typ des Messinstruments.

Sei x_0 ein Wert der Zufallsvariablen X (Abschnitt 2.1). Die Ableseunsicherheit, die systematische Restunsicherheit oder die Genauigkeitsklasse definieren ein Intervall $[x_0 - \Delta x;\ x_0 + \Delta x]$, in dem der gesuchte Wert der Messgröße bzw. der Erwartungswert E(X) liegen wird. Mangels weiterer Informationen wird in der Regel angenommen, dass keiner der Punkte und kein Teilbereich des Intervalls $[x_0 - \Delta x;\ x_0 + \Delta x]$ in irgendeiner Weise herausgehoben ist, d. h. dass die Zufallsvariable X durch eine **Gleichverteilung** beschrieben wird. Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer solchen gleichverteilten Variablen ist an jedem Punkt des Intervalls $[x_0 - \Delta x;\ x_0 + \Delta x]$ gleich groß. Außerhalb des Intervalls beträgt sie null (Abbildung 2).

Werte außerhalb des Intervalls werden durch die Zufallsvariable nicht angenommen. Anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert der Zufallsvariablen innerhalb des Intervalls $[x_0 - \Delta x;\ x_0 + \Delta x]$ liegt, ist 1, denn mit absoluter Sicherheit (mit 100 % Wahrscheinlichkeit) muss die Variable ja irgendeinen Wert innerhalb genau dieses Intervalls annehmen:

$$\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f(x)\, dx = 1.$$

Im Fall einer Gleichverteilung steht das bestimmte Integral für die Fläche eines Rechtecks der Breite 2 Δx. Folglich muss die Höhe dieses Rechtecks 1/(2 Δx) sein. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\Delta x} & \text{für } x_0 - \Delta x \le x \le x_0 + \Delta x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (9)$$

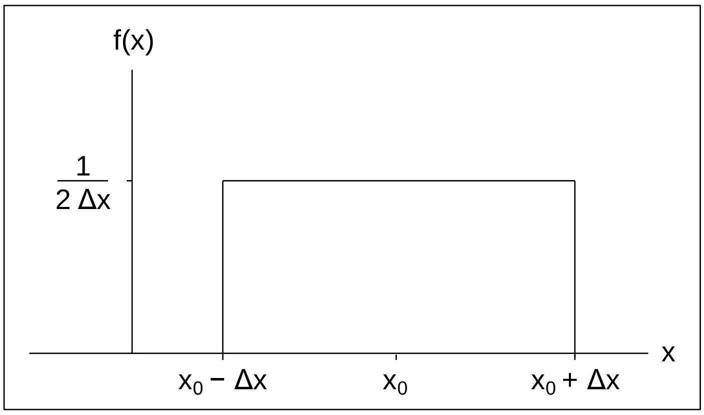

Abbildung 2: Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Gleichverteilung.

Der Erwartungswert der gleichverteilten Variablen ist $E(X) = x_0$. Dies ist unmittelbar einleuchtend, kann aber auch mit Gleichung 3 berechnet werden. Die Varianz berechnet sich[2] gemäß Gleichung 4 zu

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(\Delta x)^2}{3}. \tag{10}$$

Die Standardabweichung $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ bzw. Standardunsicherheit u ist damit

$$u = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}. \tag{11}$$

Als Messergebnis werden angegeben

- der Wert x_0 und
- die Standardunsicherheit u.

4 Kombinierte Standardunsicherheit

4.1 Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz

Im Allgemeinen werden in der Physik mehrere physikalische Größen (**unabhängige Variablen**) durch eine mathematische Gleichung miteinander verknüpft, um eine weitere Größe (die **abhängige Variable**) zu berechnen. Die betreffenden Gleichungen enthalten außerdem häufig **Parameter**, d. h. systembeschreibende Größen mit konstantem Wert.

Häufig wird die abhängige Variable nicht direkt gemessen. Stattdessen werden die unabhängigen Variablen und die Parameter erfasst, um die abhängige Variable anschließend berechnen zu können. Unsicherheiten in den unabhängigen Variablen und den Parametern werden dazu führen, dass auch die abhängige Variable unsicher ist. Man spricht von **Unsicherheitsfortpflanzung**[3].

Unabhängige Variablen und Parameter seien mit X_i (i = 1, …, n) bezeichnet, die abhängige Variable mit Y:

$$Y = f(X_1, \ldots, X_n).$$

Zur Berechnung der Unsicherheitsfortpflanzung muss die Funktion $f(X_1, \ldots, X_n)$ partiell nach den Eingangsgrößen X_i der Berechnung abgeleitet werden. Die **partielle Ableitung** $\partial Y / \partial X_i$ (gesprochen: "d Y nach d X i") ist ein Maß dafür, wie sich Y ändert, wenn X_i variiert. Um beispielsweise zu beschrei-

[2] Unter anderem mit dem Ziel, dass Sie solche Berechnungen selbst durchführen können, hat man Ihnen einmal etwas über die Integralrechnung beigebracht.

[3] Der Begriff „Fehlerfortpflanzung“ sollte, wie im Vorwort begründet, nicht verwendet werden.

ben, wie sich Y ändert, wenn X_i um ΔX_i zunimmt, bildet man zunächst die Differenz zwischen geändertem Wert und Ausgangswert:

$$\Delta_i Y = f(X_1, \ldots, X_i + \Delta X_i, \ldots, X_n) - f(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$$

Dieser Wert ist für sich allerding noch wenig aussagekräftig. Falls Sie beispielsweise die Steigung einer Bergstraße charakterisieren möchten, nutzt es wenig zu sagen, dass Sie eine Höhendifferenz von $\Delta_i Y$ Metern gemessen haben. Sie müssen diesen Absolutwert in Relation zur Strecke ΔX_i setzen, auf der diese Änderung aufgetreten ist. Daher wird $\Delta_i Y$ durch ΔX_i dividiert. Schließlich wird der Grenzwert für ΔX_i gegen null gebildet, da die lokale Änderung von Y mit X_i umso genauer erfasst wird, je kleiner ΔX_i ist. Dies führt zur Definition der partiellen Ableitung von Y nach X_i:

$$\frac{\partial f(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n)}{\partial X_i} = \lim_{\Delta X_i \to 0} \frac{f(X_1,\ldots,X_i + \Delta X_i,\ldots,X_n) - f(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n)}{\Delta X_i} \tag{12}$$

In der Praxis wird die partielle Ableitung der Funktion $Y = f(X_1,\ldots, X_n)$ nach X_i berechnet, indem man alle Größen außer X_i als konstant auffasst und bei der Ableitung nach X_i dieselben Regeln anwendet, die auch für das Differenzieren von Funktionen einer Variablen gelten.

Für X_1 bis X_n seien die Werte $\bar{x}_1$ bis $\bar{x}_n$ ermittelt worden. Als Wert der abhängigen Variablen Y ergibt sich damit $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Im Allgemeinen weist jeder der Eingangswerte $\bar{x}_1$ bis $\bar{x}_n$ dieser Berechnung eine Unsicherheit auf, welche durch die Standardunsicherheit $u(\bar{x}_i)$ (i = 1, …, n) zu charakterisieren ist (Abschnitt 3). Die daraus resultierende Standardunsicherheit des Ausgangswertes $\bar{y}$ wird **kombinierte Standardunsicherheit** genannt und mit $u_C(\bar{y})$ bezeichnet. Im Fall voneinander unabhängiger (unkorrelierter) Eingangsgrößen X_1 bis X_n berechnet sich die kombinierte Standardunsicherheit als

$$u_C(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)}{\partial X_i}\,u(\bar{x}_i)\right]^2}\,. \tag{13}$$

Dies ist das so genannte **Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz**.

4.2 Scheinbar fehlende Unsicherheit in Stichprobenwerten

Jedem Einzelwert für eine Messgröße lässt sich prinzipiell eine Standardunsicherheit des Typs B zuordnen (Abschnitt 3.2). Falls eine Stichprobe von N Messwerten erfasst wird, so erwartet man, dass sich die zufälligen Messabweichungen der Einzelwerte in einer Variabilität der Stichprobenwerte niederschlagen. Die Unsicherheit der Einzelwerte muss dann nicht näher betrachtet werden, sondern sollte in der Messunsicherheit des Typs A enthalten sein, die wie in Abschnitt 3.1 dargestellt analysiert wird.

Einerseits kann es nun aber passieren, dass die Auflösung des Messinstruments nicht ausreicht, um die Messunsicherheit sichtbar werden zu lassen. Andererseits kann es gerade bei kleinen Stichproben auch zufällig geschehen, dass die Messwerte weitgehend übereinstimmen und so fälschlicherweise den Eindruck erwecken, dass eine nur sehr geringe oder möglicherweise sogar überhaupt keine Messunsicherheit vorliegt. In Fällen dieser Art muss berücksichtigt werden, dass sich möglicherweise ein größerer Wert für die Standardunsicherheit ergibt, wenn man diesen ausgehend von der Unsicherheit des Typs B in den Einzelwerten berechnet.

Der Schätzwert für den Wert der Messgröße ist der empirische Mittelwert

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

(Abschnitt 3.1). $\bar{X}$ ist eine Funktion mehrerer Variablen, der N Stichprobenwerte X_i. Die Unsicherheit in den Einzelwerten X_i pflanzt sich nach Gleichung 13 in $\bar{X}$ fort gemäß

$$u_C(\bar{X}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial \bar{X}}{\partial X_i}\, u(X_i)\right]^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{N}\, u(X_i)\right]^2}\,.$$

Ist die Standardunsicherheit $u(X_i)$ aller Stichprobenwerte gleich ($u(X_i) = u(X)$ für alle i = 1, ..., N), so ergibt sich

$$u_C(\bar{X}) = \sqrt{N\left[\frac{1}{N}\, u(X)\right]^2}$$
$$= \frac{u(X)}{\sqrt{N}}\,. \tag{14}$$

Diese Gleichung entspricht Gleichung 8 und zeigt, dass und wie sich die Unsicherheit des empirischen Mittelwerts $\bar{X}$ mit zunehmendem Stichprobenumfang N verringert.

Sollte sich in einer Stichprobe zeigen, dass die nach Gleichung 6 berechnete Standardunsicherheit kleiner ist als diejenige, die sich aus Gleichung 14 ergibt, so ist letztere maßgeblich!

4.3 Kombination zufälliger und nicht korrigierbarer systematischer Messunsicherheit

Die Streuung von Messwerten X_i beruht auf zufälligen Messabweichungen. Das Maß für die resultierende Unsicherheit des empirischen Mittelwertes $\bar{X}$ aus den Einzelwerten (Gleichung 5) ist die Standardunsicherheit, die sich mit Gleichung 6 berechnet (Abschnitt 3.1). Sie wird im Folgenden mit $u_A(\bar{X})$ bezeichnet.

Im Allgemeinen kommt zu dieser zufallsbedingten Unsicherheit eine nicht korrigierbare systematische Restunsicherheit hinzu (Abschnitt 3.2). So können beispielsweise Spannungs- oder Stromstärkemessungen mit Multimetern einerseits eine Messunsicherheit $u_A(\bar{X})$ des Typs A zeigen, weisen immer aber auch eine systematische Restunsicherheit Δx auf, aus der sich eine zusätzliche Standardunsicherheit $u_B(\bar{X})$ ableitet (Gleichung 11). Beide Ursachen von Unsicherheit wirken sich unabhängig voneinander auf $\bar{X}$ aus. Dies wird dadurch berücksichtigt, dass für $\bar{X}$ nach dem Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz die kombinierte Standardunsicherheit

$$u_C(\bar{X}) = \sqrt{[u_A(\bar{X})]^2 + [u_B(\bar{X})]^2} \tag{15}$$

ausgewiesen wird.

5 Überdeckungsintervalle

In Spezialfällen kann die Standardunsicherheit $u(\bar{x})$ oder kombinierte Standardunsicherheit $u_C(\bar{x})$ mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage verbunden sein, nämlich dann, wenn man die Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche die Zufallsvariable X beschreibt, kennt.

5.1 Spezialfall Normalverteilung

Eine Messgröße werde durch N voneinander unabhängigen Messungen erfasst. Die Resultate X_i der einzelnen Messungen i = 1, …, N seien Werte einer normalverteilten Zufallsvariablen X (Abschnitt 2.3). Schätzwert für den Wert der Messgröße ist der empirische Mittelwert $\bar{X}$ (Gleichung 5), der ebenfalls eine Zufallsvariable darstellt. Wird er, wie im vorliegenden Fall, aus normalverteilten Werten X_i

berechnet, so ist auch er normalverteilt. Im Grenzfall $N \to \infty$ lassen sich die beiden Parameter dieser Normalverteilung, Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma_{\overline{X}}$, exakt berechnen:

$$\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\overline{X}} &= \lim_{N\to\infty} S_{\overline{X}} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sqrt{\frac{1}{N\,(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Das Intervall $[\overline{X} - S_{\overline{X}}; \overline{X} + S_{\overline{X}}]$ bzw. $[\overline{X} - u; \overline{X} + u]$ entspricht dann dem Intervall $[\mu - \sigma_{\overline{X}}; \mu + \sigma_{\overline{X}}]$ (vgl. Gleichung 6).

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsvariable mit bekannten Parametern einen Wert im Intervall [Mittelwert − Standardabweichung; Mittelwert + Standardabweichung] annimmt, beträgt p = 68,3 %[4]. Dies gilt auch für die Zufallsvariable $\overline{X}$:

$$P(\mu - \sigma_{\overline{X}} \le \overline{X} \le \mu + \sigma_{\overline{X}}) = 68{,}3\%$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung wird jetzt umgeformt. Zuerst wird μ subtrahiert.

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma_{\overline{X}} \le \overline{X} \le \mu + \sigma_{\overline{X}}) &= P(-\sigma_{\overline{X}} \le \overline{X} - \mu \le \sigma_{\overline{X}}) && | - \overline{X} \\ &= P(-\overline{X} - \sigma_{\overline{X}} \le -\mu \le -\overline{X} + \sigma_{\overline{X}}) && | \cdot (-1) \\ &= P(\overline{X} + \sigma_{\overline{X}} \ge \mu \ge \overline{X} - \sigma_{\overline{X}}) && \text{Umkehrung der Kleinerzeichens!} \\ &= P(\overline{X} - \sigma_{\overline{X}} \le \mu \le \overline{X} + \sigma_{\overline{X}}) && \text{voriges Argument von hinten nach vorn gelesen} \end{aligned}$$

Damit ist man von einer Aussage über die Werte der Zufallsvariablen zu einer Aussage über den Mittel- bzw. Erwartungswert μ der Zufallsvariablen gelangt. Es ist $P(\overline{X} - \sigma_{\overline{X}} \le \mu \le \overline{X} + \sigma_{\overline{X}}) = 68{,}3\ \%$ bzw.

$$P(\overline{X} - u \le \mu \le \overline{X} + u) = 68{,}3\ \%.$$

In der Statistik wird ein solches Intervall, das den Erwartungswert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit enthält, als Konfidenzintervall oder Vertrauensbereich für den Erwartungswert bezeichnet, im Zusammenhang mit der Angabe von Messunsicherheiten als **Überdeckungsintervall** mit der **Überdeckungswahrscheinlichkeit** p.

Falls das Überdeckungsintervall für eine andere Überdeckungswahrscheinlichkeit angegeben werden soll und für eine endliche Anzahl N von Messwerten, ist die Standardunsicherheit u mit dem so genannten **Erweiterungsfaktor** k zu multiplizieren (Tabelle 1). Es ergibt sich die **erweiterte Unsicherheit**

$$U = k\,u. \tag{18}$$

Das Messergebnis wird dann angegeben als $\overline{x} \pm U$, wobei nicht vergessen werden darf, die Überdeckungswahrscheinlichkeit p zu nennen. Zu beachten ist ferner:

1. Werte physikalischer Größen werden immer als Produkt aus einem Zahlenwert und der Einheit der betreffenden Größe angegeben. Die Einheit darf nicht vergessen werden!
2. $\overline{x}$ und U sind in derselben Einheit, derselben Zehnerpotenz und mit derselben Genauigkeit anzugeben.
3. Üblicherweise wird die Anzahl der Stellen, mit welcher der Mittelwert angegeben wird, so gewählt, dass die Unsicherheit in der letzten Stelle liegt.

[4] Zu berechnen durch numerische Integration beispielsweise nach Simpson (→ Ingenieurmathematik).

N	Erweiterungsfaktor k für p =			
	68,3%	90,0%	95,0%	99,0%
3	1,32	2,92	4,30	9,92
4	1,20	2,35	3,18	5,84
5	1,14	2,13	2,78	4,60
6	1,11	2,02	2,57	4,03
7	1,09	1,94	2,45	3,71
8	1,08	1,89	2,36	3,50
9	1,07	1,86	2,31	3,36
10	1,06	1,83	2,26	3,25
12	1,05	1,80	2,20	3,11
15	1,04	1,76	2,14	2,98
20	1,03	1,73	2,09	2,86
30	1,02	1,70	2,05	2,76
50	1,01	1,68	2,01	2,68
∞	1,00	1,65	1,96	2,58

Tabelle 1: Wert des Erweiterungsfaktors k in Abhängigkeit von der Anzahl N der Messwerte und der angestrebten Überdeckungswahrscheinlichkeit p im Fall normalverteilter Messwerte.

Anstatt die erweiterte Messunsicherheit U als Absolutwert auszudrücken, kann auch die **relative Unsicherheit** $U/\bar{x}$ berechnet werden. Üblicherweise wird sie in Prozent angegeben.

5.2 Spezialfall Gleichverteilung

Im Fall einer Messunsicherheit des Typs B, bei Vorliegen nur eines einzelnen Wertes x_0 der Messgröße, ist das Messergebnis anzugeben als $x_0 \pm u$ (Abschnitt 3.2). Häufig wird dabei von einer Gleichverteilung der möglichen Messwerte ausgegangen und die Standardunsicherheit u daher gemäß Gleichung 11 bestimmt. Es ergibt sich dann

$$
\begin{aligned}
P(x_0 - u \le X \le x_0 + u) &= \int_{x_0-u}^{x_0+u} \frac{1}{2\,\Delta x}\, dx \\
&= 0{,}577
\end{aligned}
$$

d. h. das Intervall $[x_0 - u; x_0 + u]$ umfasst 57,7 % der möglichen Messwerte. $[x_0 - u; x_0 + u]$ ist das so genannte Überdeckungsintervall zur Überdeckungswahrscheinlichkeit p = 0,577.

Falls das Überdeckungsintervall für eine andere Überdeckungswahrscheinlichkeit angegeben werden soll, ist u mit dem so genannten Erweiterungsfaktor k zu multiplizieren (Tabelle 2). Es ergibt sich die erweiterte Standardunsicherheit U = k u (Gleichung 18).

p	k
0,577	1,00
0,950	1,65
0,990	1,71
1,000	> 1,73

Tabelle 2: Wert des Erweiterungsfaktors k im Fall einer Gleichverteilung der möglichen Messwerte.

5.3 Ableitung der Standardunsicherheit aus Überdeckungsintervallen

Wichtig zu wissen ist, was in den beiden vorigen Abschnitten zur erweiterten Messunsicherheit gesagt wurde, auch, wenn Informationen zur Messunsicherheit aus Bedienungsanleitungen, Handbüchern oder Kalibrierzertifikaten entnommen werden (Abschnitt 3.2) und dort in Form von Überdeckungsintervallen vorliegen. Ist in einem Dokument ein Überdeckungsintervall $[x_0 - U; x_0 + U]$ zu einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % oder 99 % angegeben und

- ist anzunehmen, dass die Messwerte normalverteilt sind, so erhält man die Standardunsicherheit u, indem man U durch 1,96 oder 2,58 teilt (vgl. Tabelle 1).

- ist anzunehmen, dass die möglichen Messwerte gleichverteilt sind, so erhält man die Standardunsicherheit u, indem man U durch 1,65 oder 1,71 teilt (vgl. Tabelle 2).

Als Beispiel ein Zitat aus einem Kalibrierzertifikat: "Die Messunsicherheit wurde nach GUM mit dem Erweiterungsfaktor k=2 berechnet". In diesem Fall ergibt sich die Standardunsicherheit, indem man die halbe Breite des im Zertifikat angegebenen Überdeckungsintervalls durch 2 teilt (u = U/k). Der Erweiterungsfaktor 2 tritt des Öfteren auf, da er im Fall einer normalverteilten Variablen zu einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von rund 95 % führt.

6 Rundung von Werten

6.1 Signifikante Stellen

Werte sind so anzugeben, dass die Unsicherheit in der letzten Stelle, maximal in den beiden letzten Stellen liegt. Die Anzahl der Stellen, mit denen ein Wert angegeben wird, beinhaltet damit eine wichtige Information, nämlich eine Aussage über die Genauigkeit dieses Wertes!

Wird eine Längenmessung mit einem Maßstab durchgeführt, der eine Millimeterskala besitzt, so kann man die Länge X auf etwa einen Millimeter genau bestimmen. Eine sinnvolle Angabe lautet dann beispielsweise x = 100,0 cm. Einerseits wäre die Angabe einer größeren Anzahl von Stellen unseriös, da eine solche Genauigkeit bei der Messung gar nicht erreicht werden kann. Andererseits würden Sie Ihre Messung durch die Angabe x = 100 cm unnötig schlecht machen. Nach der üblichen Konvention, dass die Unsicherheit in der letzten Stelle liegt, nimmt man in diesem Fall nämlich an, dass Sie nur auf etwa einen Zentimeter genau gemessen haben.

Weitere korrekte Angaben für den oben angeführten Messwert sind x = 1000 mm oder x = 1,000 m. In allen drei Varianten weist der Zahlenwert vier Stellen auf. Korrekt - wenn auch umständlich - ist ebenfalls die Angabe x = 0,001000 km. Die Genauigkeit des Messwertes lässt sich auch hier an der letzten angegebenen Stelle ablesen (6. Stelle hinter dem Komma = 10^{-6} km = 1 mm). Die Anzahl der Stellen ab der ersten Ziffer, die ungleich null ist, beträgt ebenfalls vier. Vier ist in diesem Beispiel die Anzahl der so genannten **signifikanten Stellen** des Wertes.

Bei der Ermittlung der Anzahl der signifikanten Stellen gilt:
- Gezählt werden von links nach rechts die Stellen ab der ersten Ziffer ungleich null. Führende Nullen sind nicht signifikant.
- Exakte Werte, z. B. eine natürliche Zahl, die sich als das Ergebnis einer Zählung von Objekten ergibt, besitzen unendlich viele signifikante Stellen.
- Rechts stehende Nullen können auch darauf hinweisen, dass eine Rundung auf die letzte Ziffer ungleich null vorgenommen worden ist. In diesem Fall stellen sie keine signifikanten Stellen dar.

6.2 Rundung von Angabe zur Standardunsicherheit

Im Allgemeinen müssen auch Angaben zur Unsicherheit gerundet werden. Abweichend von den sonst üblichen Rundungsregeln sollte man eher auf- als abrunden, dabei aber „Vernunft walten lassen“[5]. Ein Wert von 10,47 wäre demnach eher auf 11 auf- anstatt auf 10 abzurunden, ein Wert von 28,05 sollte auf 28 abgerundet werden.

6.3 Regeln für die Grundrechenarten

Nehmen wir an, es wird erfasst, welche Zeit t ein Körper braucht, um in gleichförmiger Bewegung die Strecke x zurückzulegen. Das Messergebnis laute x = 1,000 m mit der Standardunsicherheit 0,001 m und t = 3,0 s mit der Standardunsicherheit 0,1 s. Mit wie vielen Stellen sollte nun die Geschwindigkeit v = x/t angegeben werden? Ihr Taschenrechner zeigt vielleicht das Ergebnis 0,3333333333. Konnte die Geschwindigkeit hier tatsächlich auf 10^{-10} m/s genau ermittelt werden?

[5] Im GUM heißt es „common sense should prevail“.

Mithilfe einer Berechnung der Unsicherheitsfortpflanzung (Abschnitt 4) ergibt sich, dass die Geschwindigkeit v anzugeben als v = (0,33 ± 0,01) m/s. Ein Ergebnis mit zwei signifikante Stellen (0,33 m/s) wurde berechnet durch Division eines Wertes mit vier signifikanten Stellen (1,000 m) durch einen Wert mit zwei signifikanten Stellen (3,0 s). Für Multiplikation oder Division lässt sich auf diese Weise die folgende Regel ableiten:

Bei einer Multiplikation oder Division besitzt das Ergebnis ebenso viele signifikante Stellen wie die Eingangsgröße mit der geringsten Anzahl signifikanter Stellen.

Für Addition oder Subtraktion gilt eine andere Regel. Hier geht es nicht um die Anzahl signifikanter Stellen, sondern um die Genauigkeit von Werten. Dies ist ein Unterschied! Beispielsweise besitzt der Wert 1,0 km zwar zwei signifikante Stellen und der Wert 1 mm nur eine signifikante Stelle, der Wert 1,0 km ist aber ungenauer: Er ist auf 0,1 km = 100 m genau angegeben, der Wert 1 mm dagegen auf Millimeter genau. Es gilt:

Bei einer Addition oder Subtraktion weist das Ergebnis die Genauigkeit der Eingangsgröße mit der geringsten Genauigkeit auf. Voraussetzung: Die Eingangsgrößen werden in derselben Einheit angegeben.

7 Zusammenfassung

- Geben Sie den mathematischen Zusammenhang $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$ zwischen der Zielgröße Y und den Eingangsgrößen X_i an.

- Bestimmen Sie die Werte $\bar{x}_1$ bis $\bar{x}_n$ der Eingangsgrößen, entweder, bei wiederholter Messung, als empirische Mittelwerte (Abschnitt 3.1, Gleichung 5) oder auf anderem Wege (Abschnitt 3.2).

- Bestimmen Sie die Standardunsicherheit $u(\bar{x}_i)$ jeder Eingangsgröße, entweder, bei wiederholter Messung, durch Berechnung der empirischen Standardabweichung (Messunsicherheit des Typs A, Abschnitt 3.1, Gleichung 6) oder auf anderem Wege (Messunsicherheit des Typs B, Abschnitt 3.2). Beachten Sie:
  - Im Fall wiederholter Messung ergibt sich ausgehend von einer Schätzung der Typ B-Unsicherheit der Einzelwerte möglicherweise eine höhere Standardunsicherheit als aus Gleichung 6 (Abschnitt 4.2).
  - Wirken sich sowohl zufällige Messabweichungen als auch eine nicht korrigierbare systematische Restunsicherheit auf $\bar{x}_i$ aus, so ist für $\bar{x}_i$ die kombinierte Standardunsicherheit nach Gleichung 15 auszuweisen (Abschnitt 4.3).

- Berechnen Sie $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

- Berechnen Sie die kombinierte Standardunsicherheit $u_C(\bar{y})$ (Abschnitt 4.1, Gleichung 13).

- Falls ein Überdeckungsintervall angegeben werden soll (Abschnitt 5), multiplizieren Sie die kombinierte Standardunsicherheit mit dem Erweiterungsfaktor, um die erweiterte Unsicherheit U zu berechnen (Gleichung 18).

- Geben Sie das Resultat $\bar{y}$ zusammen mit seiner kombinierten Standardunsicherheit $u_C(\bar{y})$ oder erweiterten Unsicherheit U an. Dokumentieren Sie Ihre Datenanalyse so, dass eindeutig nachzuvollziehen ist, was Sie wie berechnet haben.